

淹没矩形防波堤透反射系数特性研究

刘鹏飞¹, 郑永红¹, 王利生¹

(1. 中国科学院 广州能源研究所, 广东 广州 510640)

摘要: 采用解析方法研究了斜向入射波作用下淹没矩形防波堤的透反射系数特性. 首先利用特征函数展开法导出了绕射势函数的分析解和透反射系数的计算公式, 然后利用边界元方法验证了解析解, 在此基础上利用解析解分析了若干工况下的防波堤透反射特性. 计算结果表明, 淹没矩形防波堤截面的宽度、高度和相对位置以及入射角的改变都不同程度影响反射系数和透射系数. 在中等深度条件下, 对于一定频率的波浪, 位置和尺寸适当的淹没矩形堤可以反射大部分斜向入射波. 研究结果对设计淹没的矩形防波堤具有重要的参考价值.

关键词: 绕射势; 反射系数; 透射系数; 淹没矩形防波堤

中图分类号: U 656 35

文献标识码: A

文章编号: 0253-4193(2006)05-0138-07

1 引言

防波堤的主要作用是保护港口和海岸, 它可以反射入射波能量从而降低波浪对港口和海岸的破坏. 关于防波堤的结构型式和设计方法已有大量的研究工作, 国内外的研究者研究了不同结构型式的防波堤^[1-6]. 实际的波浪常为多向的不规则波, 因此讨论斜向入射波与防波堤的相互作用更具有普遍意义. Isaacson 等^[7]通过实验研究了斜向波作用下梯形透空结构防波堤的反射特性, Twu 等^[8]分析了斜向入射波条件下多层矩形体的波阻特性, 李玉成等^[9]通过理论分析和试验研究相结合的方法, 探讨了斜向规则波与局部开孔防波堤的相互作用. 常规的防波堤大都建于海底且顶部高于海平面, 这样防波堤的建筑成本较高并且影响景观. 实践证明淹没状态下的矩形防波堤是一种有效的型式, 目前对淹没堤的研究也有一定进展, 其中文献[10]针对基于海底的各种型式的潜堤, 实验测试得到了潜堤各个参数与透射系数的关系; Williams 和 McDougal^[11]研究了带有弹性支撑的淹没矩形体与正向入射波的相互作用, 指出了透射系数达到最小值的条件;

Abul- Azm^[12]研究了水波斜向入射条件下透反射系数随淹没矩形堤的几何尺寸、入射角度变化的规律. 半圆型防波堤^[13]是近年来由日本研究者首先开发研究的一种新型防波堤结构, 在淹没状态下与其他型式相比半圆型防波堤所承受的波浪力较小, 但对波浪的反射作用较差, 透射系数偏大.

淹没矩形防波堤型式结构简单, 节约成本, 在适当的条件下可以有效地反射入射波浪. 反射系数和透射系数是防波堤的重要参数, 本文采用分离变量法和特征函数展开法得到了绕射势的级数表达式, 再根据压力和速度在区域交界处的连续性, 利用特征函数的正交性确定级数中的未知系数, 由入射势和绕射势即可得出反射系数和透射系数. 通过对透反射系数的数值计算, 本文得到了透反射系数随淹没矩形防波堤的几何尺寸以及入射角的变化规律.

2 问题描述和数学模型

如图 1 所示, 在 y 方向上无限长的矩形长方体淹没在深度为 h 的流体里, 矩形体上表面距离液面为 d_1 , 下表面距离液面为 d_2 , 截面宽度为 $2a$, 高度为 b , 水波入射方向与 x 轴正向夹角为 θ . 按照图 1

收稿日期: 2005-12-12; 修订日期: 2006-05-29.

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(04000377).

作者简介: 刘鹏飞(1979-), 男, 黑龙江省大庆市人, 硕士生, 流体机械专业. E-mail: liupf@ms.giec.ac.cn

的矩形体, 可将流体域分成 I, II, III 和 IV 四个区域, 矩形体占据的空间为 $-a \leq x \leq a, -d_2 \leq z \leq -d_1$. 实际情况中只要防波堤在 y 方向的长度 (l) 远大于 $2a$ 和 b 即可认为满足本文提出的数学模型.

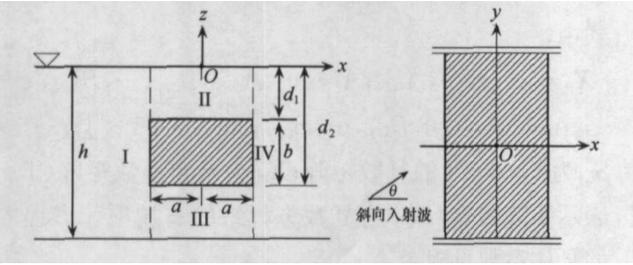


图1 淹没矩形体结构示意图

假定流体不可压、流动无旋且矩形体固定淹没于水下, 可用复速度势 $\phi(x, y, z, t) = \text{Re}[\Phi(x, z) \times e^{ik_1 \sin\theta y - i\omega t}]$ 来描述流体的状态, 这里 $\text{Re}[\]$ 表示取复数表达式的实部, t 为时间, k_1 为波数, $\Phi(x, z)$ 是与时间无关的空间复速度势, 满足变形的赫姆霍兹 (Helmholtz) 方程:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - k_1^2 \sin^2 \theta \Phi = 0. \quad (1)$$

对于线性波的作用, 一般可以将空间复速度势分解, 本文只研究绕射问题, 因此

$$\Phi = \Phi_+ + \Phi_-, \quad (2)$$

式中, Φ_+ 为入射波速度势; Φ_- 为绕射势. 一般情况下 Φ_+ 可以表示成

$$\Phi_+(x, z) = -\frac{igA \cosh[k_1(z+h)]}{\omega \cosh k_1 h} \exp(ik_1 \cos\theta x), \quad (3)$$

其中 i 为虚数单位; g 是重力加速度; A 是入射波的波幅; ω 为入射波的圆频率; 波数由下面的色散方程决定:

$$k_1 \tanh k_1 h = \omega^2 / g. \quad (4)$$

由于入射势函数满足方程(1), 因此求解 Φ_+ 也就是求解 Φ_- , 它满足以下方程:

$$\frac{\partial^2 \Phi_-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_-}{\partial z^2} - k_1^2 \sin^2 \theta \Phi_- = 0. \quad (5)$$

自由面和海底的边界条件为

$$\frac{\partial \Phi_-}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \Phi_- = 0 \quad (z = 0), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_-}{\partial z} = 0 \quad (z = -h). \quad (7)$$

淹没矩形体表面边界条件为

$$\frac{\partial \Phi_-}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi_+}{\partial z} \quad (z = -d_1, z = -d_2 \quad |x| \leq a), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Phi_-}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi_+}{\partial x} \quad (-d_2 < z < -d_1, x = \pm a). \quad (9)$$

在无穷远处,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{\partial \Phi_-}{\partial x} / ik_1 \cos\theta \Phi_- \right] = 0. \quad (10)$$

3 求解方法及系数计算

这里采用特征函数展开法来求解上面的定解问题. 将流体域划分为 I, II, III 和 IV 四个子域, 四个子域的绕射势分别记为 $\Phi_{0,1}, \Phi_{0,2}, \Phi_{0,3}$ 和 $\Phi_{0,4}$, 对每个子域采用分离变量法, 得到的解为正交函数的无穷级数, 此解满足除交界处 $x = \pm a$ 外的所有边界条件.

3.1 绕射势的级数表达式

$$\Phi_{0,1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1,n} \cos[\lambda_n(z+h)] e^{\mu_n^{(x+a)}}, \quad (11)$$

$$\Phi_{0,2} = -\Phi_+ + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{2,n} e^{\mu_{2,n}^{(x+a)}} + B_{2,n} e^{-\mu_{2,n}^{(x-a)}}] \times \cos[\alpha_n(z+d_1)], \quad (12)$$

$$\Phi_{0,3} = -\Phi_+ + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{3,n} e^{\mu_{3,n}^{(x+a)}} + B_{3,n} e^{-\mu_{3,n}^{(x-a)}}] \times \cos[\beta_n(z+h)], \quad (13)$$

$$\Phi_{0,4} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{4,n} \cos[\lambda_n(z+h)] e^{-\mu_n^{(x-a)}}, \quad (14)$$

式中,

$$\lambda_n = -ik_1, \quad (15)$$

$$\lambda_n \tan \lambda_n h = -\omega^2 / g \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (16)$$

$$\mu_n = \begin{cases} -ik_1 \cos\theta & n = 1, \\ \sqrt{(k_1^2 \sin^2 \theta + \lambda_n^2)} & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (17)$$

$$k_2 \tanh k_2 d_1 = \omega^2 / g, \quad (18)$$

$$\alpha_n = -ik_2, \quad (19)$$

$$\alpha_n \tan \alpha_n d_1 = -\omega^2 / g \quad n = 2, 3, \dots \quad (20)$$

$$\mu_{2,n} = \begin{cases} -i \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta} & n = 1, \\ \sqrt{(k_1^2 \sin^2 \theta + \alpha_n^2)} & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (21)$$

$$\beta_n = \frac{(n-1)\pi}{h-d_2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

$$\mu_{3,n} = \sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta + \beta_n^2}. \quad (23)$$

3.2 求解未知系数

以上给出的绕射势函数的表达式满足除 $x = \pm a$ 以外的边界条件. 为确定绕射势函数中的未知系数 $A_{1,n}, A_{2,n}, A_{3,n}, A_{4,n}, B_{1,n}$ 和 $B_{2,n}$, 在 $x = \pm a$

处利用水平速度和压力的连续性给出以下关系:

$$\frac{\partial \Phi_{l,1}}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{l,2}}{\partial x} & -d_1 < z < 0, x = -a, \\ -\frac{\partial \Phi_{l,3}}{\partial x} & -d_2 < z < -d_1, x = -a, \\ \frac{\partial \Phi_{l,3}}{\partial x} & -h < z < -d_2, x = -a, \\ \frac{\partial \Phi_{l,2}}{\partial x} & -d_1 < z < 0, x = a, \\ -\frac{\partial \Phi_{l,3}}{\partial x} & -d_2 < z < -d_1, x = a, \\ \frac{\partial \Phi_{l,3}}{\partial x} & -h < z < -d_2, x = a, \end{cases} \quad (24)$$

$$\Phi_{l,1} = \begin{cases} \Phi_{l,2} & -d_1 < z < 0, x = -a, \\ \Phi_{l,3} & -h < z < -d_2, x = -a, \end{cases} \quad (26)$$

$$\Phi_{l,4} = \begin{cases} \Phi_{l,2} & -d_1 < z < 0, x = a, \\ \Phi_{l,3} & -h < z < -d_2, x = a. \end{cases} \quad (27)$$

将以上的连续条件的等式两端乘以适当的特征函数,然后在相应的区间积分.特征函数满足完全的正交条件:

$$\int_{-h}^0 \cos[\lambda(z+h)] \cos[\lambda(z+h)] dz = \begin{cases} \frac{h}{2} + \frac{\sinh 2k_1 h}{4k_1} & i = j = 1, \\ \frac{h}{2} + \frac{\sin 2\lambda h}{4\lambda} & i = j \neq 1, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad (28)$$

$$\int_{-d_1}^0 \cos[\alpha(z+d_1)] \cos[\alpha(z+d_1)] dz = \begin{cases} \frac{d_1}{2} + \frac{\sinh 2k_2 d_1}{4k_2} & i = j = 1, \\ \frac{d_1}{2} + \frac{\sin 2\alpha d_1}{4\alpha} & i = j \neq 1, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad (29)$$

$$\int_h^{d_2} \cos[\beta(z+h)] \cos[\beta(z+h)] dz = \begin{cases} h-d_2 & i = j = 1, \\ \frac{h-d_2}{2} & i = j \neq 1, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (30)$$

为确定速度势函数中的未知系数必须在

$x = \pm a$ 处根据式(24)~(27)进行匹配.为简化计算可以取无穷级数中的前 N 项,便得到关于绕射势的 $6N$ 个复数方程:

$$S_{ij} X_d = F_d, \quad (31)$$

式中,

$$X_d = [A_{1,1}, \dots, A_{1,N}, A_{2,1}, \dots, A_{2,N}, B_{2,1}, \dots, B_{2,N},$$

$$A_{3,1}, \dots, A_{3,N}, B_{3,1}, \dots, B_{3,N}, A_{4,1}, \dots, A_{4,N}]^T;$$

S_{ij} 为 $6N \times 6N$ 的复数矩阵; X_d 为未知系数矩阵(T 表示矩阵转置); F_d 为复数方程组的右端项.方程的具体系数见附录 A.

3.3 透射系数和反射系数的计算

透射系数定义为 IV 区域的透射波波幅与入射波波幅的比值;反射系数为 I 区域反射波波幅与入射波波幅的比值.绕射势函数的表达式(12)~(14)中包含了非传播模态的扰动项($n > 1$),对本文的淹没矩形防波堤,透射系数 C_t 和反射系数 C_r 可以表成以下形式:

$$C_t = \left| 1 + \frac{i\omega A_{4,1} \cosh k_1 h e^{-ik_1 a \cos \theta}}{gA} \right|, \quad (32)$$

$$C_r = \left| \frac{i\omega A_{1,1} \cosh k_1 h e^{-ik_1 a \cos \theta}}{gA} \right|. \quad (33)$$

4 方法验证和结果分析

4.1 本文方法验证

对于斜向波和淹没矩形体的透反射系数的实验研究,目前暂无相关文献及实验数据.本文采用边界元方法(BEM)计算相同问题的透反射系数,边界元的具体计算方法见文献[14].采用边界元方法求得计算结果的精度主要取决于计算边界的离散程度,本文的单元划分原则为:计算域边界按每个波长布置 100 个均匀单元进行划分(注意,如果按此划分原则得到的矩形防波堤的四条边界上的某一边界上布置的单元数小于 10,则按 10 布置该条边界的单元数),求得的数值结果在各个频率下与解析解的相对误差不超过 1%.如图 2 和 3 所示($k_1 h$ 为无量纲化波数),在不同几何参数条件下解析方法与边界元方法计算得到的透反射系数结果吻合良好,这表明本文的解析方法是正确的.

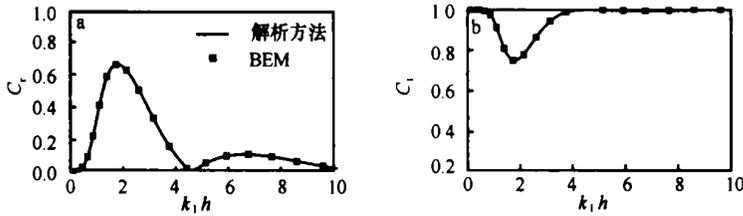


图2 解析方法与数值方法计算结果对比 1
 $a/h = 0.4, d_1/h = 0.2, d_2/h = 0.3, \theta = 45^\circ$

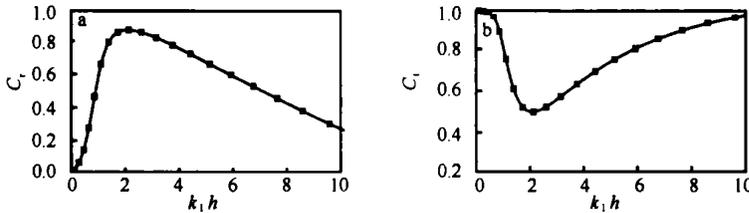


图3 解析方法与数值方法计算结果对比 2
 $a/h = 0.3, d_1/h = 0.2, d_2/h = 0.4, \theta = 75^\circ$

4.2 结果分析

图4表示在不同的相对截面宽度条件下, 透反射系数随无量纲化波数的变化规律。当无量纲化波数小于4时, 相对截面宽度变化对透反射系数的影响明显。在其他条件不变情况下, 随着矩形相对截面宽度 ($2a/h$) 的增加, 反射系数的峰值逐渐增大, 对应峰值的无量纲化波数值相应减小, 这说明较宽的相对截面使淹没矩形体对较长的入射波反射效果更为显著。图5表示在防波堤的淹没深度 (d_1) 不变条件下矩形体相对截面高度变化对透反射系数的影响, 由图可见, 在矩形截面相对

宽度 ($a/h = 0.3$) 较小以及小波数 ($k_1 h < 2$) 的情况下, 截面相对高度的增加会使反射系数峰值逐渐增大, 而当波数较大时则情况相反; 当宽度 ($a/h = 0.5$) 增加时, 不同宽度的峰值对应的无量纲化波数趋近一致, 图5c显示无量纲化波数约为2.0时反射系数达到最大值, 而且截面相对高度 (b/h) 的增加会引起反射系数减小。对于无量纲化波数不大于1的情况, 相对高度增加会增大反射系数, 但对应的峰值较小。由于水波为表面波, 随着深度的增加水波运动幅度减小, 因此相对高度的改变对透反射系数影响相对较小。

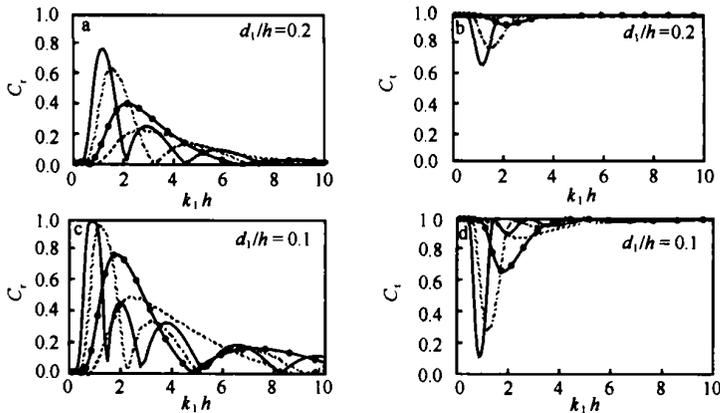


图4 矩形截面宽度对反射系数和透射系数的影响 ($\theta = 30^\circ, b/h = 0.2$)
 — $a/h = 0.7$, - - - $a/h = 0.5$, - · - $a/h = 0.3$, $a/h = 0.2$

在中等深度 ($\pi/10 < k_1 h < \pi$) 条件下^[15] 矩形防波堤的淹没深度对透反射系数的影响显著。如图6

所示, 矩形体的截面宽度较小时 ($a/h = 0.3$), 不同淹没深度的反射系数峰值在无量纲化波数约为2.0

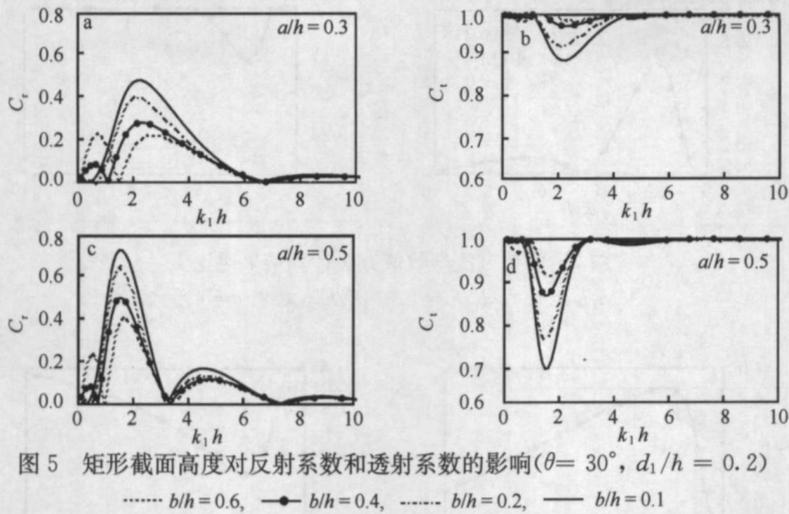


图5 矩形截面高度对反射系数和透射系数的影响($\theta = 30^\circ$, $d_1/h = 0.2$)

..... $b/h = 0.6$, —●— $b/h = 0.4$, - - - $b/h = 0.2$, — $b/h = 0.1$

附近;宽度增加时($a/h = 0.5$)峰值位置对应的无量纲化波数值相应减小.随着相对淹没深度(d_1/h)减小,反射系数显著增大.图6c显示反射系数在无量纲化波数约为1.19附近可在0.95以上($d_1/h = 0.1$),相应的透射系数小于0.3.图7显示了不同入

射角对透反射系数的影响,在无量纲化波数小于4的情况下,入射角增大会引起反射系数缓慢增加;当无量纲化波数大于4时入射角的增大会引起反射系数较为明显的增大.

根据线性水波理论,波浪运动幅度随着水深的增

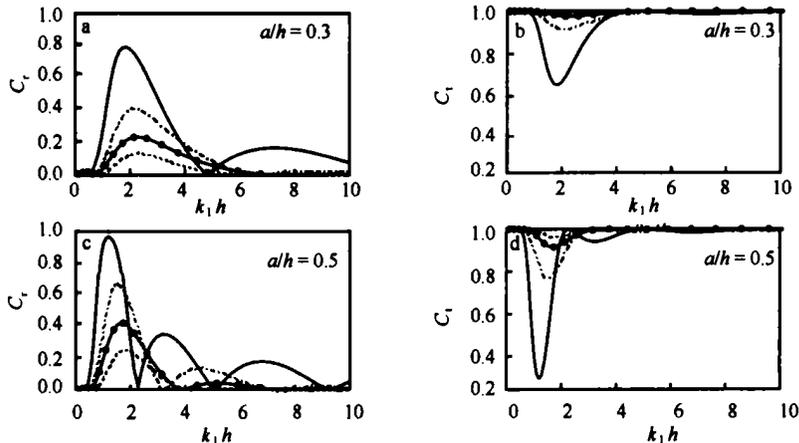


图6 矩形防波堤淹没深度(d_1)对反射系数和透射系数的影响($\theta = 30^\circ$, $b/h = 0.2$)

— $d_1/h = 0.1$, $d_1/h = 0.2$, —●— $d_1/h = 0.3$, - - - $d_1/h = 0.4$

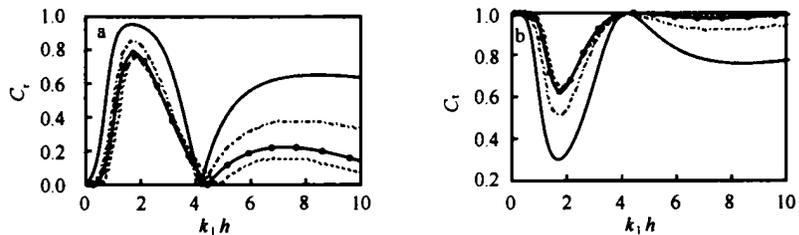


图7 入射角对反射系数和透射系数的影响($a/h = 0.3$, $d_1/h = 0.1$, $b/h = 0.2$)

— $\theta = 75^\circ$, $\theta = 60^\circ$, —●— $\theta = 45^\circ$, - - - $\theta = 30^\circ$

加而减小,水波的运动主要集中于流体的自由表面,因此淹没防波堤越靠近自由面,其阻波的效果越明显.文献[10]指出,与潜堤透反射系数关系最密切的

是相对堤顶水深.采用 Abu-Azm^[12]的平面波近似方法可以很好地解释透反射系数随入射角的变化规律,在满足匹配方程条件下忽略速度势中的扰动项,

得到的关系是:当 $\theta = 90^\circ$ 时, $C_r = 1, C_t = 0$

5 结论

本文采用解析的方法研究了淹没矩形防波堤与斜向入射波相互作用下的透反射系数特性, 得出了不同几何参数及入射角对透反射系数影响的结果。

从结果分析可知在中等深度条件下与淹没的矩形防波堤透反射系数关系最密切的是潜堤的淹没深度, 其次是矩形截面宽度; 在浅水和深水条件下, 淹没矩形防波堤的几何尺寸对透反射系数影响不明显。因此, 本文讨论的结果对在中等深度的海域建造淹没防波堤有实际意义。

参考文献:

- [1] 谢世楞. 90年代我国防波堤设计进展[J]. 水运工程, 1999, 309(10): 11—17.
- [2] 徐光, 谢善文, 李元音, 等. 防波堤的新结构型式[J]. 水运工程, 2001, 324(11): 20—25.
- [3] 鄒祿文, 谢世楞. 削角直立式防波堤可靠度分析[J]. 海洋工程, 2005, 23(2): 1—10.
- [4] 王元战, 张宏志, 周枝荣. 沉箱式防波堤静力与动力稳定性设计体型分析[J]. 海洋工程, 2005, 23(2): 66—70.
- [5] 俞聿修. 斜坡式和直墙式防波堤技术的新进展[J]. 港工技术, 2000, (4): 1—4.
- [6] 王美茹, 谢善文, 贾东华, 等. 半圆型防波堤的设计和应用[J]. 港工技术, 1999, (3): 1—6.
- [7] ISAACSON M, PAPPS D, MANSARD E. Oblique reflection characteristics of rubble-mound structures[J]. Journal of Waterway, Ports, Coastal Engineering, 1996, 122(1): 1—7.
- [8] TWU Sheng-wen, LIU Chang-chi, TWU Chang-wei Wave damping characteristics of vertical stratified porous structures under oblique wave action[J]. Ocean Engineering, 2002, 29: 1295—1311.
- [9] 李玉成, 刘洪杰, 董国海. 局部开孔防波堤对斜向波反射的理论分析和试验研究[J]. 水利学报, 2004, 10: 63—72.
- [10] 张日向, 刘圆, 蒲高军. 潜堤结构型式及其透射系数研究[J]. 海洋工程, 2003, 21(4): 81—85.
- [11] WILLIAMS A N, McDOUGAL W G. A dynamic submerged breakwater [J]. Journal of Waterway, Ports, Coastal, and Ocean Engineering, 1996, 122(6): 288—296.
- [12] ABUL AZM A G Diffraction through wide submerged breakwaters under oblique waves[J]. Ocean Engineering, 1994, 21(7): 683—706.
- [13] 饶永红, 俞聿修, 张宁川. 淹没状态下半圆型防波堤的水力特性研究[J]. 海洋学报, 2001, 23(2): 124—131.
- [14] CHO I H, KEE S T, KIM M H The performance of flexible-membrane wave barriers in oblique incident waves[J]. Applied Ocean Research, 1997, 19: 171—182.
- [15] Mc CORMICK M E. Ocean Wave Energy Conversion[M]. New York: John Wiley & Sons, 1981.

Reflection and transmission properties of submerged rectangular breakwaters

LIU Peng-fei¹, ZHENG Yong-hong¹, WANG Li-sheng¹

(1 Guangzhou Institute of Energy Conversion, Chinese Academy of Sciences, Guangzhou 510640, China)

Abstract: An analytic method is used to analyze the transmission and reflection coefficients of a submerged rectangular breakwater (SRB) in oblique waves. The diffraction potential functions and expressions for reflection and transmission coefficients are obtained by using the eigenfunction expansion method. A boundary element method is used to verify the correctness of the present analytic method. The reflection and transmission properties of SRBs are studied for some specific cases. The results show that the geometrical parameters of SRBs and the angle of incident waves have appreciable influences on the transmission and reflection coefficients. The SRB can be an effective wave barrier for certain waves if properly designed in intermediate water. The results are useful for the design of SRBs.

Key words: diffraction potential; reflection coefficients; transmission coefficients; submerged rectangular breakwater

附录 A 矩阵系数和右端项的表达式

矩阵系数:

$$S_{i,i} = \mu_i \int_{-h}^0 \cos^2[\lambda(z+h)] dz,$$

$$S_{i,N+j} = -\mu_{2,j} \int_{-d_1}^0 \cos[\lambda(z+h)] \cos[\alpha(z+d_1)] dz,$$

$$S_{i,2N+j} = \mu_{2,j} e^{2\alpha\mu_{2,j}} \int_{-d_1}^0 \cos[\lambda(z+h)] \times \cos[\alpha(z+d_1)] dz,$$

$$S_{i,3N+j} = -\mu_{3,j} \int_{-h}^{d_2} \cos[\lambda(z+h)] \cos[\beta(z+h)] dz,$$

$$S_{i,4N+j} = \mu_{3,j} e^{2\alpha\mu_{3,j}} \int_{-h}^{d_2} \cos[\lambda(z+h)] \times \cos[\beta(z+h)] dz,$$

$$S_{N+i,N+j} = -\mu_{2,j} e^{2\alpha\mu_{2,j}} \int_{-d_1}^0 \cos[\lambda(z+h)] \times \cos[\alpha(z+d_1)] dz,$$

$$S_{N+i,2N+j} = \mu_{2,j} \int_{-d_1}^0 \cos[\lambda(z+h)] \times \cos[\alpha(z+d_1)] dz,$$

$$S_{N+i,3N+j} = -\mu_{3,j} e^{2\alpha\mu_{3,j}} \int_{-h}^{d_2} \cos[\lambda(z+h)] \times \cos[\beta(z+h)] dz,$$

$$S_{N+i,4N+j} = \mu_{3,j} \int_{-h}^{d_2} \cos[\lambda(z+h)] \cos[\beta(z+h)] dz,$$

$$S_{N+i,5N+i} = -\mu_i \int_{-h}^0 \cos^2[\lambda(z+h)] dz,$$

$$S_{2N+i,j} = \int_{-d_1}^0 \cos[\lambda(z+h)] \cos[\alpha(z+d_1)] dz,$$

$$S_{2N+i,N+i} = -\int_{-d_1}^0 \cos^2[\alpha(z+d_1)] dz,$$

$$S_{2N+i,2N+i} = -e^{2\alpha\mu_{2,i}} \int_{-d_1}^0 \cos^2[\alpha(z+d_1)] dz,$$

$$S_{3N+i,j} = \int_{-h}^{d_2} \cos[\lambda(z+h)] \cos[\beta(z+h)] dz,$$

$$S_{3N+i,3N+i} = -\int_{-h}^{d_2} \cos^2[\beta(z+h)] dz,$$

$$S_{3N+i,4N+i} = -e^{2\alpha\mu_{3,i}} \int_{-h}^{d_2} \cos^2[\beta(z+h)] dz,$$

$$S_{4N+i,N+i} = -e^{2\alpha\mu_{2,i}} \int_{-d_1}^0 \cos^2[\alpha(z+d_1)] dz,$$

$$S_{4N+i,2N+i} = -\int_{-d_1}^0 \cos^2[\alpha(z+d_1)] dz,$$

$$S_{4N+i,5N+j} = \int_{-d_1}^0 \cos[\lambda(z+h)] \cos[\alpha(z+d_1)] dz,$$

$$S_{5N+i,3N+i} = -e^{2\alpha\mu_{3,i}} \int_{-h}^{d_2} \cos^2[\beta(z+h)] dz,$$

$$S_{5N+i,4N+i} = -\int_{-h}^{d_2} \cos^2[\beta(z+h)] dz,$$

$$S_{5N+i,5N+j} = \int_{-h}^{d_2} \cos[\lambda(z+h)] \cos[\beta(z+h)] dz.$$

右端项:

$$F_{d,i} = P_{1,i} e^{-ik_1 a \cos\theta},$$

$$F_{d,N+i} = P_{1,i} e^{ik_1 a \cos\theta},$$

$$F_{d,2N+i} = P_{2,i} e^{-ik_1 a \cos\theta},$$

$$F_{d,3N+i} = P_{3,i} e^{-ik_1 a \cos\theta},$$

$$F_{d,4N+i} = P_{2,i} e^{ik_1 a \cos\theta},$$

$$F_{d,5N+i} = P_{3,i} e^{ik_1 a \cos\theta},$$

式中,

$$P_{1,i} = \begin{cases} -\frac{gAk_1 \cos\theta}{\omega \cosh kh} \left[\frac{h}{2} + \frac{\sinh 2k_1 h}{4k_1} \right] & i=1; \\ 0 & i \neq 1, \end{cases}$$

$$P_{2,i} = \frac{igA}{\omega \cosh k_1 h} \int_{-d_1}^0 \cosh[k_1(y+h)] \times \cos[\alpha(y+d_1)] dy,$$

$$P_{3,i} = \frac{(-1)^{i+1} igA k_1 \sinh[k_1(h-d_2)]}{\omega \cosh k_1 h (k_1^2 + \beta^2)}.$$