

适合中等水流的 Boussinesq 方程

邹志利¹, 刘忠波¹, 孙昭晨¹

(1. 大连理工大学 海岸及近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 推导了含量阶为 $O(\varepsilon^{1/2})$ 的瞬变非均匀流的 Boussinesq 水波方程, 讨论了该量阶水流对流场速度和压力分布的影响, 采用了 Crank-Nicolson 格式的预估-校正有限差分法对方程进行了数值求解. 把数值结果与无水流情况的实验结果进行了对比, 验证了该方程和数值计算方法的有效性, 与经典的 Boussinesq 方程和含量阶为 $O(1)$ 的瞬变非均匀流的 Boussinesq 水波方程的计算结果进行了比较, 考察了该方程的适用范围.

关键词: 波浪; 水流; Boussinesq 方程

中图分类号: O353.2

文献标识码: A

文章编号: 0253-4193(2004)03-0126-10

1 引言

在近岸水域波流通常是共存的, 水流包括潮流、洋流、河口处径流以及与波浪破碎有关的沿岸流、裂流及其所形成的近岸环流. 这些水流与波浪之间存在着相互作用, 如多普勒效应导致顺流时波长变大、波高减小, 而逆流时导致波长变小、波高增大, 甚至出现波浪破碎^[1,2]; 水流也会改变波浪传播方向, 引起波浪折射, 使波浪出现辐聚或辐散^[3]. 当水流存在时选择波浪数学模型也要考虑水流的影响, 如经典 Boussinesq 方程忽略了 $O(\varepsilon^{1/2})$ 阶以及更高阶非线性项, 只适合于 $\varepsilon \ll 1$ 的弱非线性情况, 可以考虑的流体速度量级为 $\varepsilon \sqrt{gh}$. 因此, 当水流速度小于或等于 $\varepsilon \sqrt{gh}$ 时, 经典 Boussinesq 方程可应用于波流共存的情况, 反之, 当水流速度大于 $\varepsilon \sqrt{gh}$ 时该方程则不适用, 需要重新推导可以考虑水流存在的 Boussinesq 方程. Yoon 和 Liu^[4] 假定水流速度量级大于波浪水质点速度而小于群速, 建立了考虑水流存在的 Boussinesq 方程, 并用所建立的方程计算了海岸裂流、涡旋水流和水槽及水池中水流对波浪的作用. Chen 等^[5] 应用 Nwogu 型方程时考虑了水流与波浪的相互作用, 他们假定水流速度量级大于波浪水质点

收稿日期: 2002-11-15; 修订日期: 2003-09-26.

基金项目: 国家重点基础研究专项经费资助项目(59979002, 59839330); 教育部科学技术重点资助项目(99147); 博士学科专项基金资助项目.

作者简介: 邹志利(1957-), 男, 山东省黄县人, 教授, 博士生导师, 从事海岸和港口波浪研究. E-mail: zlzou@dlut.edu.cn

速度,且最大可达群速.当水流速度接近群速时,方程色散性的精度变得更为重要,因此他们人为地在方程中加入3阶色散项的办法来改进方程色散性的精度.邹志利^[6]在水流量阶为1(水流速度量级为 \sqrt{gh})的假定下,应用摄动展开法建立了含强水流的 Boussinesq 方程.

本文考虑中等大小水流与波浪相互作用的问题.假定水流速度量级为 $\varepsilon^{1/2}\sqrt{gh}$,在此条件下推导了 Boussinesq 方程,并应用摄动展开法给出了波流相互作用条件下速度和压力的分布.采用摄动展开法的优点是在摄动展开的各阶问题中可以分别了解波流的相互作用,显示瞬变非均匀流与波浪相互作用的机理.给出了数值求解该方程的有限差分格式,并对平底情况进行了数值计算,给出了波浪与水流共存时水平速度沿水深分布的计算结果.

2 方程的推导

假定水流速度量阶为 $O(\varepsilon^{1/2})$, $\varepsilon=H/h$, H 为波高, h 为特征水深,则对小参数 $\varepsilon^{1/2}$ 可作如下摄动展开:

$$f = f_0 + \varepsilon^{1/2}f_{1/2} + \varepsilon f_1 + \varepsilon^{3/2}f_{3/2} + \varepsilon^2f_2 + \varepsilon^{5/2}f_{5/2} + \dots \quad (1)$$

式中, f 可为无因次水平速度(u)、垂向速度(w)、波面升高(η)和压力(p); f_0 对应静水情况,除静压力 $p_0 = -z$ 外,其余为0.将上式代入无因次欧拉垂向动量方程中^[1],取其 μ^0 阶($\mu = h/L$, L 为特征波长)近似则 $\partial p / \partial z = 1$,对该式关于 z 从 η 到 z 积分得

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) &= \eta - z + O(\mu^2) \\ &= \varepsilon^{1/2}\eta_{1/2} + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^{3/2}f_{3/2} + \varepsilon^2f_2 + \varepsilon^{5/2}f_{5/2} - z + O(\mu^2, \varepsilon^3), \end{aligned} \quad (2)$$

将式中 p 按式(1)展开可得

$$p_0 = -z, \quad p_v|_{z=\eta_{1/2}} = \eta_v \quad \left[v = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2} \right]. \quad (3)$$

将式(1)代入无因次旋度方程^[1]

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \mu^2 \dot{\dot{w}} + O(\mu^6) \quad (4)$$

可得

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/2} \frac{\partial u_{1/2}}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial z} + \varepsilon^{3/2} \frac{\partial u_{3/2}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \varepsilon^{5/2} \frac{\partial u_{5/2}}{\partial z} + \dots \\ = \mu^2 [\varepsilon^{1/2} \dot{\dot{w}}_{1/2} + \varepsilon \dot{\dot{w}}_1 + \varepsilon^{3/2} \dot{\dot{w}}_{3/2} + \varepsilon^2 \dot{\dot{w}}_2 + \dots]. \end{aligned} \quad (5)$$

由上式可分解出 $\partial u_v / \partial z$ ($v = 1/2, 1, 3/2, \dots$)的表达式,但在此之前需先明确水流垂向速度梯度 $\dot{\dot{w}}_{1/2}$ 的量阶.因为 $u_{1/2}$ 和 $w_{1/2}$ 分别为水流的水平和垂向速度,类似于文献[1],可证在假定水底坡度大小为

$$\dot{\dot{h}} = O(\sigma) \quad (6)$$

时有

$$\dot{\dot{w}}_{1/2} = O(\sigma^2), \quad (7)$$

式中, σ 为表征水底坡度大小的小参数, $\sigma \ll 1$.本文的水流速度量级为 $\varepsilon^{1/2}\sqrt{gh}$,相应地可以提高 σ 的量阶,与文献[1]中取 $\sigma = \mu^2$ 不同(该文对应水流速度大小为 \sqrt{gh}),这里取其 $\sigma = \mu$.因 $\mu = O(\varepsilon^{1/2})$,式(5)可分解为

$$\frac{\partial u_v}{\partial z} = 0 \quad \left[v = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right], \quad (8a)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{\mu^2}{\varepsilon} \cdot \cdot \cdot w_1, \quad (8b)$$

$$\frac{\partial u_{5/2}}{\partial z} = \frac{\mu^2}{\varepsilon} (\cdot \cdot \cdot w_{3/2} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \cdot \cdot w_{1/2}), \quad (8c)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{\mu^2}{\varepsilon} (\cdot \cdot \cdot w_2 + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \cdot \cdot w_{3/2}), \quad (8d)$$

式中, 水流垂向速度 $w_{1/2}$ 和 $w_{3/2}$ 分别出现在 $\partial u_{5/2}/\partial z$ 和 $\partial u_3/\partial z$ 的表达式中, 表明水流的存在并不影响波浪的 1 阶和 2 阶速度 (u_1 , $u_{3/2}$ 和 u_2) 沿垂向的分布规律, 但对 3 阶以上速度 ($u_{5/2}$ 和 u_3) 沿垂向分布规律将产生影响. 这一结果是由于假定了 $\sigma = \mu$. 对应这一假定水底坡度的量阶为

$$\cdot \cdot \cdot h = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] h = \sigma \left[\frac{\partial}{\partial(\sigma x)}, \frac{\partial}{\partial(\sigma y)} \right] h = O(\sigma) = O(\mu), \quad (9)$$

该水底坡度要比文献[1]中水底坡度(量级为 $O(\mu^2)$) 的量阶大.

由式(8a)得水水平速度 $u_{1/2}$, 波浪 1 阶水平速度 u_1 以及波流相互作用产生的水平速度 $u_{3/2}$ 与 z 无关, 沿水深分布是均匀的, 即

$$u_v = u_v(x, y, t) \quad \left[v = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right], \quad (10)$$

从而

$$w_v = - \cdot \cdot \cdot (hu_v) - z \cdot \cdot \cdot u_v \quad \left[v = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right]. \quad (11)$$

把上式代入式(8b)和(8c)并关于 z 从 $\varepsilon^{1/2}\eta_{1/2}$ 到 z 积分得

$$u_2 = u_2^* - \frac{\mu^2}{\varepsilon} (z - \varepsilon^{1/2}\eta_{1/2}) \cdot \cdot \cdot [\cdot \cdot \cdot (hu_1)] - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\varepsilon} (z^2 - \varepsilon\eta_{1/2}^2) \cdot \cdot \cdot (\cdot \cdot \cdot u_1), \quad (12)$$

$$u_{5/2} = u_{5/2}^* - \frac{\mu^2}{\varepsilon} (z - \varepsilon^{1/2}\eta_{1/2}) \cdot \cdot \cdot \left\{ \cdot \cdot \cdot \left[h \left(u_{3/2} + \frac{1}{\varepsilon} u_{1/2} \right) \right] \right\} - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\varepsilon} (z^2 - \varepsilon\eta_{1/2}^2) \cdot \cdot \cdot \left[\cdot \cdot \cdot \left(u_{3/2} + \frac{1}{\varepsilon} u_{1/2} \right) \right], \quad (13)$$

式中, $u_2^* = u_2|_{z=\eta_{1/2}}$, $u_{5/2}^* = u_{5/2}|_{z=\eta_{1/2}}$.

把式(1)代入欧拉垂向动量方程^[1]可得

$$\frac{\partial p_v}{\partial z} = 0 \quad \left[v = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right], \quad (14)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial z} = \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\partial w_1}{\partial t}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial p_{5/2}}{\partial z} = \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\partial w_{3/2}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} (u_{1/2} \cdot \cdot \cdot) w_{1/2} + \frac{\mu^2}{\varepsilon} (u_{1/2} \cdot \cdot \cdot) w_1. \quad (16)$$

由关于 z 从 $\varepsilon^{1/2}\eta_{1/2}$ 到 z 积分的以上三式, 并应用边界条件(3) 可得

$$p_v = \eta_v \quad \left[v = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right], \quad (17)$$

$$p_2 = \eta_2 + \frac{\mu^2}{\varepsilon} (z - \varepsilon^{1/2}\eta_{1/2}) \cdot \cdot \cdot (hu_1)_t + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\varepsilon} (z^2 - \varepsilon\eta_{1/2}^2) (\cdot \cdot \cdot u_1), \quad (18)$$

$$p_{5/2} = \eta_{5/2} + \frac{\mu^2}{\varepsilon} (z - \varepsilon^{1/2} \eta_{1/2}) \left\{ \dots \cdot (hu_{3/2})_t + u_{1/2} \cdot \dots \left[\dots \cdot \left[h \left(u_1 + \frac{1}{\varepsilon} u_{1/2} \right) \right] \right] \right\} + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\varepsilon} (z^2 - \varepsilon \eta_{1/2}^2) \left\{ (\dots \cdot u_{3/2})_t + u_{1/2} \cdot \dots \left[\dots \cdot \left[u_1 + \frac{1}{\varepsilon} u_{1/2} \right] \right] \right\}. \quad (19)$$

由以上速度和压力的表达式可见, 水流速度 $u_{1/2}$ 进入了 $u_{5/2}$ 和 $p_{5/2}$ 的表达式. 这与文献[1]中强水流情况的 u_2 和 p_2 表达式所含的水流速度 u_0 的形式有所不同, 即不仅是以多普勒效应进入表达式(含 $u_{1/2} \cdot \dots$ 的项在文献[1]中为含 $u_0 \cdot \dots$ 的项), 而且像波浪速度 u_1 一样进入了表达式(含 $u_{1/2}/\varepsilon$ 项). 这反映了当水流大小不同(文献[1]的水流速度为 \sqrt{gh} , 而本文的为 $\varepsilon^{1/2} \sqrt{gh}$)时, 波流相互作用也有不同之处.

将展开式(1)代入欧拉水平动量方程^[1]可得

$$\frac{\partial u_{1/2}}{\partial t} + \dots \eta_{1/2} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \dots \eta_1 = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial u_{3/2}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (u_{1/2} \cdot \dots) u_{1/2} + (u_{1/2} \cdot \dots) u_1 + \dots \eta_{3/2} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_1 \cdot \dots) u_1 + (u_{1/2} \cdot \dots) u_{3/2} + \dots p_2 = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial u_{5/2}}{\partial t} + (u_{1/2} \cdot \dots) u_2 + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (u_{3/2} \cdot \dots) u_{1/2} + \dots p_{5/2} = 0. \quad (24)$$

将前面的 u_2 , $u_{5/2}$, p_2 和 $p_{5/2}$ 的表达式代入方程(21)和(22)可得

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t} + (u_1 \cdot \dots) u_1 + (u_{1/2} \cdot \dots) u_{3/2} + \dots \eta_2 = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial u_{5/2}^*}{\partial t} + (u_{1/2} \cdot \dots) u_2^* + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (u_{3/2} \cdot \dots) u_{1/2} + \dots \eta_{5/2} = 0. \quad (26)$$

将式(20)、(21)、(22)、(25)和(26)分别乘以 $\varepsilon^{1/2}$, ε , $\varepsilon^{3/2}$, ε^2 和 $\varepsilon^{5/2}$, 然后相加可得

$$u_t + (u \cdot \dots) u + \dots \eta = O(\varepsilon^3), \quad (27)$$

式中,

$$u = \varepsilon^{1/2} u_{1/2} + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{3/2} u_{3/2} + \varepsilon^2 u_2^* + \varepsilon^{5/2} u_{5/2}^*. \quad (28)$$

下面将方程(27)中 u 用水深平均速度 u 表达. 由前面各阶水平速度 $u_w \left(v = \frac{1}{2} \sim \frac{5}{2} \right)$ 的表达式可得

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} u dz \\ &= \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} (\varepsilon^{1/2} u_{1/2} + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{3/2} u_{3/2} + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^{5/2} u_{5/2}) dz \\ &= u + \frac{1}{2} \mu^2 (h + \varepsilon^{1/2} \eta_{1/2}) \dots [\dots \cdot (hu)] - \\ &\quad \mu^2 \left[\frac{1}{6} h (h - \varepsilon^{1/2} \eta_{1/2}) - \frac{1}{3} \varepsilon \eta_{1/2}^2 \right] \dots (\dots \cdot u) + O(\varepsilon^3, \mu^2 \varepsilon^2). \end{aligned} \quad (29)$$

利用上式 u 与 u 的关系可将方程(27)表示为

$$u_t + (u \cdot \nabla)u + \nabla \eta = \eta \left[h \frac{DF^-}{Dt} + \eta \frac{\partial F^+}{\partial t} \right] + O(\varepsilon^3, \mu^2 \varepsilon^2), \quad (30)$$

式中,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla, \quad (31)$$

$$F^\pm = \frac{1}{2} \nabla \cdot [\nabla \cdot (hu)] \pm \frac{h}{6} \nabla \cdot (\nabla \cdot u). \quad (32)$$

将以上方程写成有因次形式,它与连续方程一起构成含量阶为 $O(\varepsilon^{1/2})$ 中等大小瞬变非均匀流的 Boussinesq 方程,即

$$\eta + \nabla \cdot [(h + \eta)u] = 0, \quad (33)$$

$$u_t + (u \cdot \nabla)u + g \nabla \eta = h \frac{DF^-}{Dt} + \eta \frac{\partial F^+}{\partial t}. \quad (34)$$

将方程(33)和(34)与文献[1]中以下含量阶为 $O(1)$ 的强水流的 Boussinesq 方程对比:

$$\eta + \nabla \cdot [(h + \eta)u] = 0, \quad (35)$$

$$u_t + (u \cdot \nabla)u + g \nabla \eta = h \frac{DF^+}{Dt} + \eta \frac{DF^+}{Dt} + \frac{1}{3} \eta^2 \frac{D}{Dt} [\nabla \cdot (\nabla \cdot u)], \quad (36)$$

可见两者的误差项都为 $O(\varepsilon^3, \mu^2 \varepsilon)$, 差别仅在方程右端第二和第三项,即方程(34)右端第二项不含与 $u \cdot \nabla$ 的有关部分,也没有第三项(含 η^2 项),而文献[1]的方程(36)右端第二项含这一部分,并有第三项.对于方程(34),该部分和第三项的量阶为 $O(\varepsilon^3, \mu^2 \varepsilon)$,它们是可以忽略的高阶项.

将前面所得各阶速度和压力表达式代入式(1)可得速度沿水深的分布,利用式(29)可将这些表达式用水深平均速度表达,将其写成有因次形式为

$$u(x, y, z, t) = u - \left(z - \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2}h \right) \nabla \cdot [\nabla \cdot (hu)] - \frac{1}{2} [z^2 - \frac{1}{3}h(h - \eta) - \frac{1}{3}\eta^2] \nabla \cdot (\nabla \cdot u) + O(\varepsilon^3, \mu^2 \varepsilon). \quad (37)$$

近似到 1 阶,可推导出经典的 Boussinesq 方程和本文方程(33)、(34)的色散关系都为

$$(\omega - k\eta u_0)^2 = ghk^2 / \left(1 + \frac{1}{3}k^2 h^2 \right), \quad (38)$$

而文献[1]的含强水流的方程(35)、(36)的色散关系为

$$(\omega - ku_0)^2 = g(h + \eta_0)k^2 / \left[1 + \frac{1}{3}k^2(h + \eta_0)^2 \right], \quad (39)$$

有水流存在时的 1 阶斯托克斯波色散关系为

$$(\omega - ku_0)^2 = gk \tanh(kh), \quad (40)$$

式中, η_0 是水流引起的波面变化; k 是波数; ω 是圆频率; u_0 是输入水流速度; h 是水深. η_0 在文献[1]中的量阶为 1, 是不可忽略的, 这导致了色散方程(38)与色散方程(39)的不同.

3 方程的数值求解

3.1 方程的差分格式

这里求解由式(33)和(34)组成的联立方程在 x 方向的一维形式. 采用交错网格, 对方程应用预估-校正法的 Crank-Nicolson 差分格式进行求解^[7].

3.2 初始条件

由于是对有水流情况进行研究, 所以对初始条件应做相应改变: 假定流场在初始时刻 $t = 0$ 的速度分布为纯水流的的速度 $u = u_0$, 压力为静水压力, 所有其他待求变量均为 0.

3.3 边界条件

3.3.1 入射边界条件

考虑到水流的存在, 对相应的入射边界条件修改如下: 入射边界中取波浪为正弦波, 波面升高为

$$\eta = A \cos(\omega t), \quad (41)$$

水深平均的水平速度为

$$u = A \frac{(\omega - ku_0)}{kh} \sin(\omega t) + u_0, \quad (42)$$

式中, A 为波幅; 其他量同前面所述. 水流存在时 k 和 ω 满足的色散关系见方程(38)和(39).

3.3.2 出口边界条件

对出口边界条件也需考虑到水流的存在, 所以简化的边界条件为

$$\eta_n + \frac{1}{c} \eta = 0, \quad u_x + \frac{1}{c} u_t = 0, \quad (43)$$

$$c = \sqrt{gh(1 + \eta^n/h)} + u_0, \quad (44)$$

式中, c 为波浪在开边界处的传播速度; η^n 为上一时刻开边界处的波面升高. 因为需考虑出口处水流的影响, 故不能设海绵层为吸收边界条件.

4 计算结果和对比

4.1 与无水流的纯波浪实验结果对比

为验证数值差分格式, 对水流速度为 0, 即对纯波浪情况的计算结果与实验结果进行了对比. 实验中的波浪要素见表 1. 水槽长 23 m, 左端为造波板, 右端设有消波设施. 用于对比的浪高仪位于距造波板 4.7 m 处. 计算结果与实验对比见图 1 和 2. 由图 1 和 2 可知, 计算结果与实验数据吻合较好, 说明数值差分格式的有效性.

表 1 波浪要素

	水深/m	波高/m	波浪周期/s
实验 1	0.5	0.04	1.6
实验 2	0.4	0.06	1.6

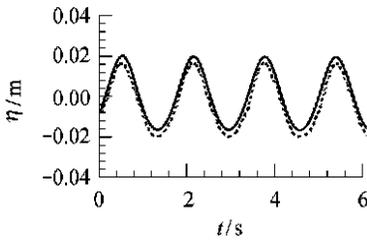


图1 波面升高的时间历程图
——本文计算结果,实验结果

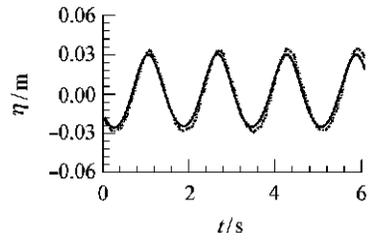


图2 波面升高的时间历程图
——本文计算结果,实验结果

4.2 与经典的 Boussinesq 方程以及文献[1]中的水流速度量阶为 $O(1)$ 的 Boussinesq 方程的计算结果对比

计算中取水流和波浪方向相同(顺流)或相反(逆流),这里取水深为常数($h = 0.4 \text{ m}$),波高 $H = 0.02 \text{ m}$,波浪周期 $T = 2.0 \text{ s}$,水流速度 $u_0 = 2.0, 0.5, -0.1, -0.2, -0.3$ 和 -0.5 m/s 。

图3给出了水流速度 $u_0 = 2.0, 0.5, -0.1, -0.2, -0.3$ 和 -0.5 m/s 时的波面升高 η 沿水槽长度方向的变化,图中将本文计算结果与经典 Boussinesq 方程以及文献[1]中的含强水流的 Boussinesq 方程的计算结果进行了比较。由这些图可以看出,在水流为顺流时三个方程的计算结果接近,这是因为在顺流时波长较长,此时更接近于浅水情况,经典 Boussinesq 方程此时也是适用的,可有足够的精度。同时,在水深为常数情况下,本文方程以及文献[1]方程的右端比经典 Boussinesq 方程多出的几项的量值较小(因 $\partial^3 u / \partial x^3$ 相对较小故 η 相对 h 也较小),这几项对计算结果影响不大,所以三者计算结果接近。在逆流时随着水流速度绝对值的增大,波长变得越来越小,经典 Boussinesq 方程与本文方程以及文献[1]方程的差别对计算结果影响越来越大。对比这些图可以看出,波浪顺流时波长增大,逆流时波长减小,这与实际情况相符。

图4给出了由本文方程、经典 Boussinesq 方程、文献[1]中的方程的波面升高数值结果(见图3)的两波峰之间距离平均值得到的波长与线性波色散关系[即方程(40)]得到的波长随 Froude 数 (Fr) 变化的对比,其中 L 为无水流时的波长, L_c 为水流存在下的波长, $Fr = u_0 / \sqrt{gh}$, 此时的相对水深 $h/L_0 = 0.064 [L_0 = gT^2 / (2\pi)]$ 。由图可见,由本文方程和文献[1]方程得到的波长比由经典 Boussinesq 方程得到的波长更接近线性精确解。对于图中算例, $\varepsilon = H/h = 0.05$, 经典 Boussinesq 方程适应的水流速度范围不大于 $\varepsilon \sqrt{gh} \approx 0.1 \text{ m/s}$, 在图中对应 $-0.05 < Fr < 0.05$, 所得波长与精确解符合,而超过此范围,则误差变大(顺流时的误差可由图3中 $u_0 = 2.0 \text{ m/s}$ 时的波形上的差别看出); 本文方程适应的水流速度范围不大于 $\varepsilon^{1/2} \approx 0.2 \sqrt{gh}$, 对应 $-0.2 < Fr < 0.2$, 图中 Fr 值大多都在此范围内; 文献[1]中的方程适应的水流速度范围不大于 \sqrt{gh} , 对应 $-1 < Fr < 1$, 所以图中由本文方程和文献[1]方程计算出来的结果与精确解较为符合。

4.3 沿水深变化的速度与线性精确解的对比

图5给出了利用公式(37)计算的速度沿水深分布与相应的下式的线性精确解的对比:

$$u(z, x, t) = u_0 + \frac{gAk \cosh k(z+h)}{(\omega - hu_0) \cosh kh} \cos(kx - \omega t). \quad (45)$$

图中水流速度 $u_0 = 0.0, -0.1, -0.2, -0.3 \text{ m/s}$, 水深、波高和波浪周期与 4.2 节的一致。由

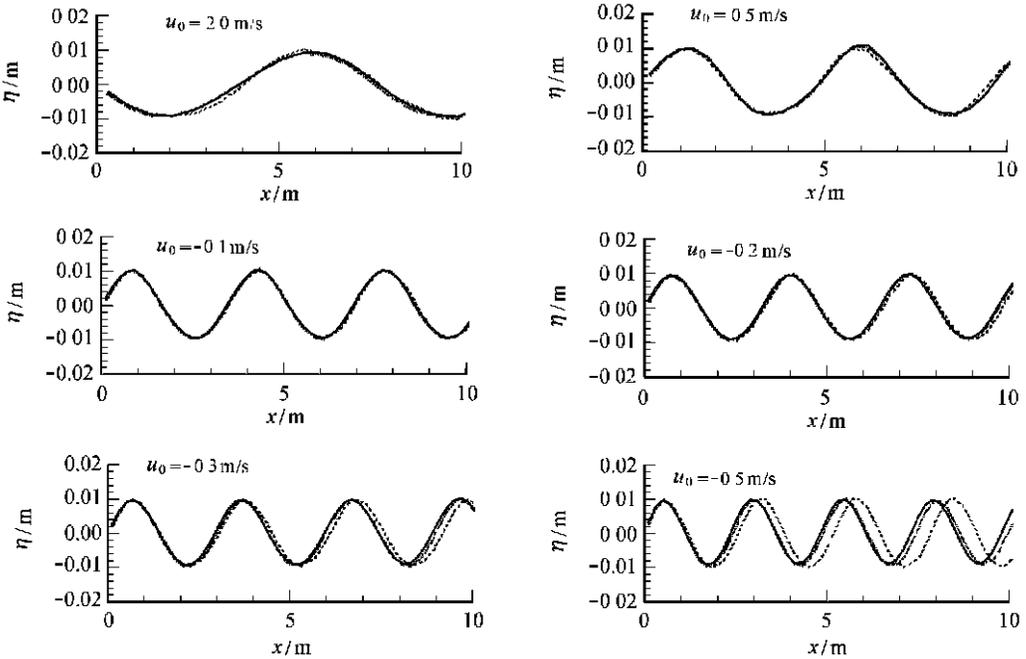


图3 波面升高沿空间的变化(u_0 为水流速度)

----- 经典 Boussinesq 方程, —— 本文的方程, 文献[1]的方程

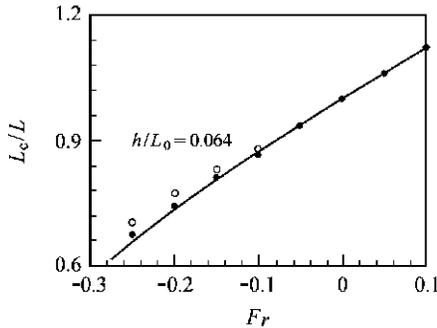


图4 波长与线性精确解的对比

—— 线性精确解, ○ ○ ○ 本文的方程, + + + 文献[1]的方程, ○ ○ ○ 经典 Boussinesq 方程

图可见, 本文计算结果与解析解基本吻合, 但同时随着逆流速度值越来越大, 速度沿水深越来越不均匀, 关于这一点也可由式(37)得知: 因式中 $u - u$ 正比于平均速度的 2 次导数 u_{xx} , u_{xx} 正比于波面升高曲线波峰处的曲率, 随着逆流速度值的增大, 波长越来越短, 波峰处的曲率绝对值越来越大, 即平均速度的 2 次导数绝对值越来越大, 式(37)表明, 这将造成沿水深的速度分布越来越不均匀. 图中本文方程的结果与解析解存在一定差别, 产生差别的原因一方面可能是本文方程色散性是近似的, 另一方面可能是本文方程是弱非线性的, 而精确解是线性的.

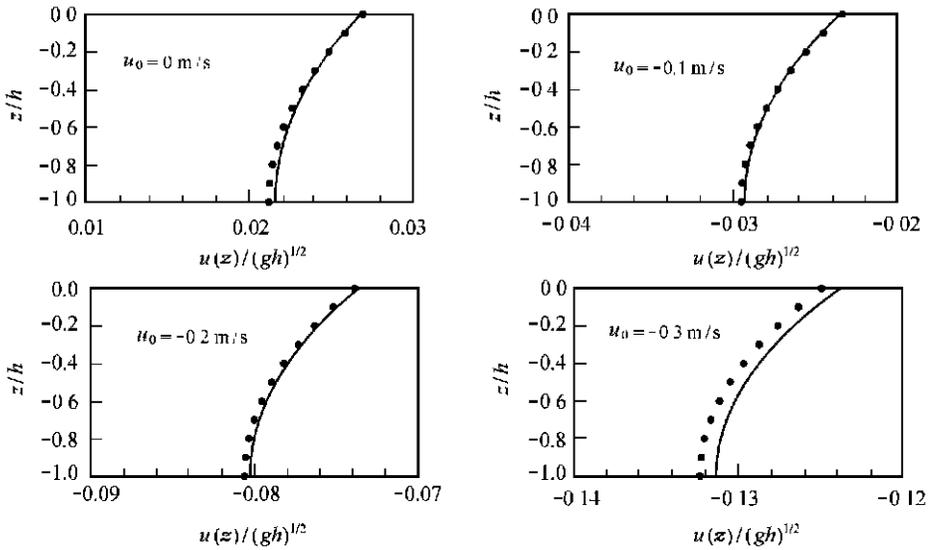


图5 沿水深分布的水平速度与线性精确解的对比

——线性精确解, \bullet \bullet \bullet 本文方程

5 结束语

(1) 本文建立了量阶为 $O(\varepsilon^{1/2})$ 中等大小的瞬变非均匀流的 Boussinesq 方程, 讨论了该量阶水流对流场速度和压力分布的影响. 该数学模型可用于中等大小的水流情况.

(2) 建立了该方程的数值计算差分格式, 并对水深为常数情况进行了数值计算. 把无水流情况计算结果与实验结果进行了对比, 两者符合较好, 验证了本文的数值方法是正确的. 波浪顺流和逆流情况与经典 Boussinesq 方程以及文献[1]中量阶为 $O(1)$ 的强水流 Boussinesq 方程的波面升高计算结果进行了对比, 结果表明, 在顺流时三个方程的数值结果接近, 这反映顺流时波浪波长变长, 更接近浅水长波, 所以经典 Boussinesq 方程也适用; 逆流时随着水流速度绝对值的增大, 本文方程、文献[1]中的方程与经典 Boussinesq 方程结果给出的波长出现明显差别, 这反映了对中等大小水流及强水流情况应分别采用本文方程和文献[1]方程的必要性.

(3) 以本文算例为例可以说明经典 Boussinesq 方程、文献[1]方程和本文方程所适用的水流的大小范围. 算例中波高 $H = 0.02$ m, 水深 $h = 0.4$ m, 从而 $\varepsilon = H/h = 0.05$, $\sqrt{gh} \approx 2$ m/s, 于是可知经典 Boussinesq 方程适用水流大小为 $\varepsilon \sqrt{gh} \approx 0.1$ m/s, 对应的 Froude 数 $Fr = 0.05$; 文献[1]方程适用水流大小为 $\sqrt{gh} \approx 2$ m/s, 对应的 Froude 数 $Fr = 1$; 本文方程适用水流大小为 $\varepsilon^{1/2} \sqrt{gh} \approx 0.45$ m/s, 对应的 Froude 数 $Fr = 0.2$. 本文算例中顺流流速最大达 2.0 m/s, 即已达文献[1]方程的水流范围, 逆流时流速最大为 0.5 m/s, 即已达本文方程的水流范围, 为中等大小水流. 若继续增大水流, 发现通过数值计算得到的波长与线性精确解的误差会更大, 这可能是由于随着逆流水流流速绝对值的增大波长会继续变短, 波长变短时需要方程具有更高精度的色散性, 而本文方程及所用文献[1]的方程都具有与经典 Boussinesq 方程的同样的色散性精度, 所以不适于波长较短的情况. 今后的工作将是提高方程的色散性精度以适应逆流短波

的情况. 另外, 本文对三个方程计算结果的对比仅是针对水深为常数的情况, 今后的工作将对水深变化的情况进行研究.

参考文献:

- [1] UNNA P J. Wave and tidal streams[J]. *Nature*, 1942, 149: 219—220.
- [2] LONGUET-HIGGINS M S, STEWART R W. Changes in form of short gravity waves on long waves and tidal current[J]. *J Fluid Mech*, 1960, 6: 565—583.
- [3] 李玉成. 波浪谱在斜向流作用下的折射[J]. *海洋学报*, 1985, 7(5): 611—620.
- [4] YOONS B, LIU P L F. Interaction of currents and weakly nonlinear water waves in shallow water[J]. *J Fluid Mech*, 1989, 204: 397—419.
- [5] CHEN Qin, MADSEN P A, SCHAFFER H A, et al. Wave-current interaction based on an enhanced Boussinesq equation approach[J]. *Coastal Eng*, 1998, 33: 11—39.
- [6] 邹志利. 含强水流的高阶 Boussinesq 方程[J]. *海洋学报*, 2000, 22(4): 41—50.
- [7] ZOU Zhi-li, XU Ben-he. Numerical model for solving Boussinesq-type equations[J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 1998, 17(3): 375—386.

Boussinesq equation with moderate current

ZOU Zhi-li¹, LIU Zhong-bo¹, SUN Zhao-chen¹

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The Boussinesq equations with the transient and non-uniform current of $O(\varepsilon^{1/2})$ are derived. The effects of currents on the distributions of velocities and pressure are discussed. The prediction-correction method of finite difference scheme is employed to solve the equations numerically. The numerical results are compared with the experimental data for the case of currents being equal to 0 and the agreements are good, which demonstrates the accuracy of the equations and the efficiency of the numerical methods. The numerical results are also compared with the numerical results of the classic Boussinesq equations and the Boussinesq equations with strong currents of $O(1)$, and the application range of the equations is also investigated.

Key words: waves; current; Boussinesq equation