

海浪产生磁场的能量分布计算

唐劲飞¹, 龚沈光¹, 王金根¹

(1. 海军工程大学 兵器工程系, 湖北 武汉 430033)

摘要: 结合前人在海浪功率谱研究以及海浪产生磁场两方面的研究, 求出了海浪-磁场系统的传递函数, 计算了传递函数的峰值、对应的峰值频率, 分析了这些指标随高度的变化. 根据理论分析, 给出了感应磁场总功率的表达式和峰值频率满足的方程, 指出海浪感应磁场是一个窄带随机过程. 最后选择几种典型的海浪谱, 计算了它们感应的磁场功率谱以及总功率、功率谱峰值、峰值频率以及等效噪声带宽.

关键词: 海浪谱; 海浪感应的磁场; 功率谱; 窄带随机过程

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 0253- 4193(2002)01- 0045- 07

1 引言

在地磁场中运动的海水将产生电流, 因而产生磁场. 研究海浪感应的磁场噪声有两方面的意义: (1) 在航空磁探测中当海浪感应磁噪声和欲检测的目标噪声量级、频带相近时, 这种噪声是一个不可忽视的干扰源, 因此研究运动的飞行器接收到的海浪感应磁噪声的大小、频带随高度的变化, 对于航空磁探有实用价值; (2) 海浪谱和海浪感应磁场功率谱之间是线性变换关系, 从感应磁场功率谱可以反推出海浪谱, 因此对感应磁场功率谱的研究提供了获得海浪谱的一种新的可能途径.

2 经典海浪谱模型和几个假设

线性海浪理论中最常用的是 Longuet-Higgins 模型, 它假设任意时刻的波高为无限多随机相位正弦波的叠加^[1]:

$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n), \quad (1)$$

式中, ε_n 为在 $(0, 2\pi)$ 中均匀分布的随机变量. 在这种情况下, 海浪谱 $S(\omega)$ 定义为

$$\sum_{\omega}^{\omega+\delta\omega} \frac{1}{2} a_n^2 = S(\omega) \delta\omega. \quad (2)$$

需要指出, Longuet-Higgins 模型代表的是一个平稳正态过程. 由文献[1]可知, 通常所说的海浪一般有风浪、涌浪和近岸浪. 在实际情况下, 海浪的运动是一个复杂的过程, 不一定是长期平稳的, 有很多非线性因素的作用. 本文为了简化问题, 假设该过程是短期平稳的.

近几十年来国内外学者采用半理论半经验的方法, 相继得到了一些海浪谱^[1], 早期的有 Neumann 谱, 目前认为比较实用、比较有代表性的有 PM 谱、Bretschneider-Mitsuyasu 谱和 JONSWAP 谱, 其中 PM 谱代表的是充分成长的海浪, 只有风速一个参量, 而后两种谱均有多个调整参数.

PM 谱的表达式为

$$S(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp\left[-\beta \left(\frac{g}{U\omega}\right)^4\right], \quad (3)$$

式中, U 为海面上 19.5 m 高处的风速; 无因次常数 $\alpha = 8.1 \times 10^{-3}$, $\beta = 0.74$.

BM 谱的表达式为

$$S(\omega) = 0.257 \frac{H_{1/3}^2 \omega_{1/3}^4}{\omega^5} \exp\left[-1.03 \left(\frac{\omega_{1/3}}{\omega}\right)^4\right], \quad (4)$$

式中, $H_{1/3}$ 为有效波高; $\omega_{1/3}$ 为对应“有效周期”的角频率.

JONSWAP 谱的表达式为

$$S(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp\left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega}\right)^4\right] \gamma^{\exp\left[\frac{(\omega - \omega_{\max})^2}{2\sigma^2 \omega_{\max}^2}\right]}, \quad (5)$$

式中, γ 为谱峰升高因子, $\gamma = \frac{S_{\max}}{(S_{\max})_{\text{PM}}}$, 观测值为 1.5 ~ 6.0, 平均值为 3.3; σ 为峰形参数:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 0.07, & \omega &\leq \omega_{\max} \\ \sigma &= 0.09, & \omega &> \omega_{\max} \end{aligned} \right\};$$

α 为无因次常数, $\alpha = 0.076X^{-0.22}$; ω_{\max} 为谱峰频率, 对于无因次谱峰频率 Ω_{\max} 有 $\Omega_{\max} = U\omega_{\max}/g = 22X^{-0.33}$, X 为无因次风区, $X = gx/U^2$.

3 重力波海浪产生的磁场

对海浪产生的磁场近几十年来不少学者有过深入的研究, 其中 Weaver^[2]所建立的模型比较精确, 并且其理论结果已经被多次实验证实. Weaver 建立的方程为

$$\Delta^2 \mathbf{H} = 4\pi\zeta \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - 4\pi\zeta (\mathbf{F} \cdot \Delta) \mathbf{v}, \quad (6)$$

式中, \mathbf{H} 为感应磁场矢量; \mathbf{v} 为海浪速度矢量; \mathbf{F} 为地磁场矢量; ζ 为电导; ε 为介电常数. 最终可解得在 $z < 0$ (海面上) 时^[2]

$$h_z = \frac{-A}{\beta} [1 - (1 + i\beta)^{1/2}]^2 \exp(mz), \quad (7)$$

式中, $A = amF(\sin I + i\cos I \cos \theta)$, a 为波高, $m = \omega^2/g$, 为波数, F 为地磁场大小, I 为磁倾角, θ 为波传播方向与磁子午线的夹角; $\beta = 4\pi\sigma g^2/\omega^3$. z 方向的磁场 $H_z = h_z \exp(i\omega t - imx)$. H_x, H_y 的表达式与 H_z 类似, 只相差一个与海浪传播方向有关的因子, 因此在本文中只讨论 H_z .

由 Weaver 建立的方程知, 如果 $\mathbf{H}(\omega, x, z, t)$ 是方程的解, 因为方程中的算子都是线性算

子且与 ω 无关, $\int_{\omega} \exp(j\theta) \mathbf{H}(\omega, x, z, t) d\omega$ 就对应于 $\int_{\omega} \exp(j\theta) v(\omega, x, z, t) d\omega$ 的解, 因此海浪-感应磁场系统是一个线性系统.

4 海浪-磁场系统的传递函数及讨论

由式(5), h_z 可表示为

$$\begin{aligned} h_z(\omega, z) &= a(\omega) G(\omega, z) \\ &= a(\omega) F(\sin I + i \cos I \cos \theta) \exp(mz) \frac{\omega^2 [1 - (1 + i\beta)^{1/2} j]^2}{g \beta}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $G = F(\sin I + i \cos I \cos \theta)$, 为常数. 如果将海浪功率谱 $S_w(\omega)$ 作为系统的输入, 磁场的功率 $S_H(\omega)$ 作为输出, 则根据随机过程和线性理论有如下关系:

$$S_H(\omega) = S_w(\omega) |G(\omega, z)|^2,$$

该系统的功率传递函数为

$$\begin{aligned} K(\omega) &= |G(\omega, z)|^2 \\ &= F^2(\sin^2 I + \cos^2 I \cos^2 \theta) \left| \frac{[1 - (1 + i\beta)^{1/2} j]^2}{\beta} \right|^2 m^2 \exp(2mz) \\ &= CT(\omega, z), \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $C = F^2(\sin^2 I + \cos^2 I \cos^2 \theta)$, 对于固定方向传播的海浪为常数;

$$T(\omega, z) = \left| \frac{[1 - (1 + i\beta)^{1/2} j]^2}{\beta} \right|^2 m^2 \exp(2mz). \quad (10)$$

因此, 只要知道了海浪功率谱, 就可以通过传递函数计算磁场的功率谱.

图1是 $T(\omega, z)$ 在高度分别为 0, 10 和 20 m 时的图像, 横轴和纵轴都采用对数坐标. 从曲线可以看出, 在最大值左边 $T(\omega, z)$ 的行为相似, 近似为直线. 当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $\omega^2/g \rightarrow 0$, 且 $[1 - (1 + i\beta)^{1/2} j]^2/\beta \rightarrow i$, 因此当 $\omega \rightarrow 0$ 时 $T(\omega) \rightarrow 0$. 过了最大值后, 函数以不同的方式快速趋近于 0, 这表明 $T(\omega, z)$ 对应的系统是一个最大值对应频率非常小(接近于 0)的窄带滤波器.

图2是在高度为 0~300 m 时 $|T(\omega, z)|$ 的最大值和最大值对应的频率. 从图2可以看出, 最大值和它对应的频率随高度的变化比较小, 随着高度的变化, 谱峰向低频移动, 因此可以认为传递函数超低频部分的增益随高度变化较小.

由于在 $T(\omega, z)$ 中有一个包含 β 的复杂函数, 可以考虑将 $T(\omega, z)$ 对 β 化简. 实际上, $\beta = 4\pi g^2/\omega^3$ 是 ω 的减函数, 而一般海浪谱在 $\omega < 0.2$ 时可以认为是 0, 这时 $\beta = 0.019208$, 因此对于一般情况下的海浪 $(1 + i\beta)^{1/2} \approx 1 + i\beta/2$ 是一个较好的近似, 因此

$$K(\omega) \approx \beta^2 F^2(\sin^2 I + \cos^2 I \cos^2 \theta) m^2 \exp(2mz)/16$$

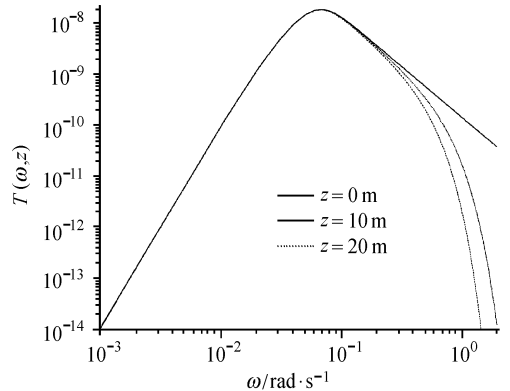


图1 $|T(\omega, z)|$ 的图像

$$\approx F^2 \pi^2 \sigma^2 g^2 \exp(2\omega^2 g/z)/\omega^2 \quad (11)$$

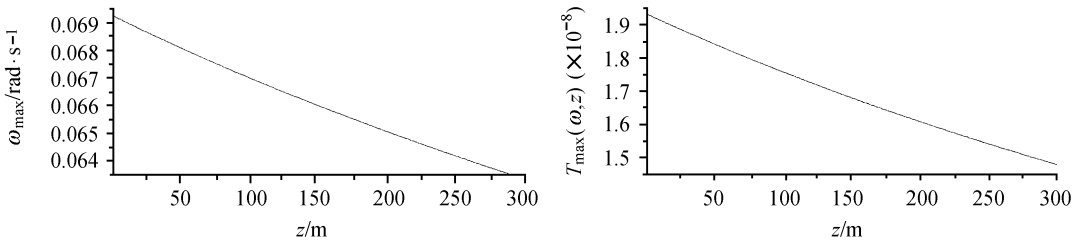


图2 |T(ω, z)| 的最大值和对应的角频率

在大部分海浪谱的峰值频率附近, 可以认为上式成立.

5 几种经典海浪谱感应的磁场

为了进行比较, 分别计算了不同情况下 PM 谱、JONSWAP 谱和 BM 谱感应的磁场噪声功率谱. 计算中取的参数: 地磁场大小为 45 000 nT, 海水的电导率为 4 S/m, 磁偏角在 1° ~ 3° (可近似为 0), 磁倾角在 25° ~ 55°, θ 取 0°. 因此, sin I + cos²I cos²θ 项可近似为 1.

PM 谱与 BM 谱在数学形式有一些相似之处. 事实上有一部分海浪谱可表示为

$$S(\omega) = k_1 \omega^{-a} \exp[-\frac{c}{\omega^4}], \quad (12)$$

式中, k_1, a, c 对不同的海浪谱为不同的正常数. JONSWAP 谱稍为复杂, 可以表示为两部分的乘积, 第一部分与上式形式相同, 第二部分是峰升高因子, 它与 PM 谱在高频部分有相似性, 而在峰值频率处有明显的升高^[2].

设感应磁场的功率谱为 $M(\omega)$, 对于 PM 谱和 BM 谱, 如果采用海浪- 磁场系统的简化传递函数, 则

$$\begin{aligned} M(\omega) &= k\omega^{-a-2} \exp(-c\omega^{-4} + 2\omega^2 z/g) \\ &= k\omega^{-b} \exp(-c\omega^{-4} - m\omega^2) \quad (z < 0), \end{aligned} \quad (13)$$

式中, k, b, c, m 对不同的海浪谱为不同的正常数. 上式在一定程度上可作为海浪感应磁场功率谱的近似表达式, 条件是: (1) 选用 PM 谱、BM 谱或和形式相同的谱(如 $\hat{\omega} \hat{I} \hat{\omega}^3 - \hat{I} \hat{\omega}^3$ 谱); (2) 海浪谱峰值频率远大于海浪- 磁场系统传递函数的峰值频率. 只要确定了 k, b, c, m 中的两个参数, 就可以求出感应磁场功率谱. 对于感应磁场功率谱, 有几个比较重要的指标:

- (1) 谱峰值, (2) 谱峰对应频率, (3) 等效噪声带宽, (4) 磁场噪声总功率, (5) 影响这些指标的因素.

将式(13)求导可以得到磁场功率谱的峰值频率 ω_{\max} :

$$2m\omega_{\max}^6 + b\omega_{\max}^4 - 4c = 0, \quad (z < 0, c > 0). \quad (14)$$

对于 $\omega \rightarrow \infty, 2m\omega^6 + b\omega^4 - 4c \rightarrow \infty$, 当 $\omega = 0, 2m\omega^6 + b\omega^4 - 4c < 0$, 而在 $0 \sim \infty$, 方程右边函数对 ω 的导数大于 0, 因此该方程有惟一的正根, 也就是说感应磁场功率谱只有一个单峰. 如果将峰值频率作为高度 z 的函数, 则随着高度的增加, 峰值频率将向低频运动, 同时随着高度的上升, 感应磁场功率谱将衰减.

感应磁场总功率为 $P = \int_0^{+\infty} M(\omega) d\omega$, 式(14) 对 ω 积分, 得总功率为

$$P = (kc^{(1-b)/4}/4)(\text{hypg}([], [1/2, (5-b)/4], -m^2c/4)\Gamma[(b-1)/4] + mc^{1/2}\text{hypg}([], [(7-b)/4, -3/2], -m^2c/4)\Gamma[(b-3)/4] - 2m^{(b-1)/2}c^{(b-1)/4}\text{hypg}([], [(1+b)/4, (3+b)/4], -m^2c/4)\Gamma[(1-b)/2], \quad (15)$$

式中, $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数; $\text{hypg}(\cdot)$ 为广义超几何函数. 注意该式只适用于与式(13)形式相同的磁场功率谱, 对 JONSWAP 谱感应的磁场不适用.

等效噪声带宽定义为磁场功率除以功率谱的最大值:

$$B_{eq} = \frac{1}{M(\omega_{max})} \int_0^{+\infty} M(\omega) d\omega, \quad (16)$$

它表示噪声功率集中在一个矩形区域内, 该区域的高度为功率谱最大值, 而宽度即为等效噪声带宽.

根据以上的推导和论述进行了一些计算, 其结果如图 3~ 6, 其中图 3 是 JONSWAP 谱与 PM 谱的比较, 上部分是海浪谱, 下部分是感应磁场功率谱, 高度为 10 m. 图 4 显示风速参数为 16.24 m/s 的 PM 谱的等效带宽和总功率随高度变化的情况, 总功率采用了对数坐标. 图 5 是 PM 谱与 JONSWAP 谱感应磁场功率谱谱峰和峰值频率比较, 式中谱峰采用了对数坐标. 图 6 解释了 JONSWAP 谱的峰值频率产生一点不连续的原因.

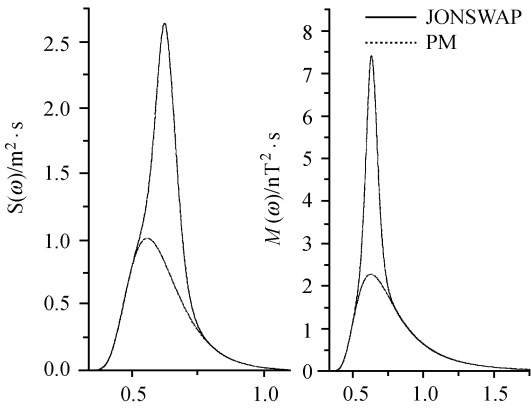


图3 海浪谱(上)和感应的磁场功率谱(下)
($z = 10\text{ m}$)

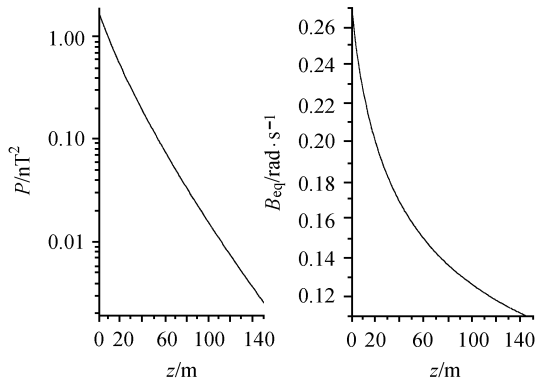


图4 风速参数为 16.24 m/s 的 PM 谱感应的
磁场功率谱等效带宽和总功率($z = 1 \sim 150\text{ m}$)

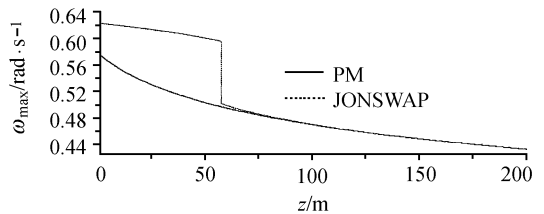
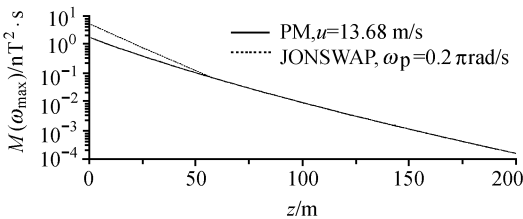


图5 PM 谱与 JONSWAP 谱感应磁场功率谱谱峰和峰值频率比较

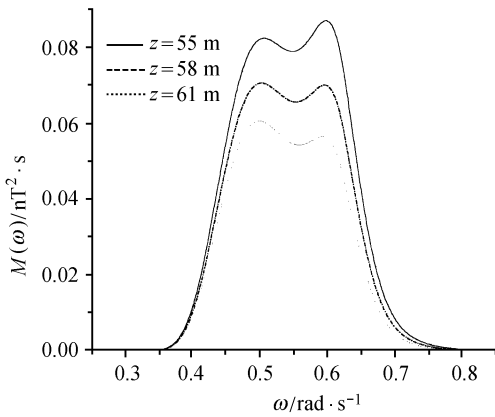


图 6 $\omega_0 = 0.2\pi$ rad/s, 不同高度时 JONSWAP 谱感应磁场产生的双峰现象和谱峰的偏移

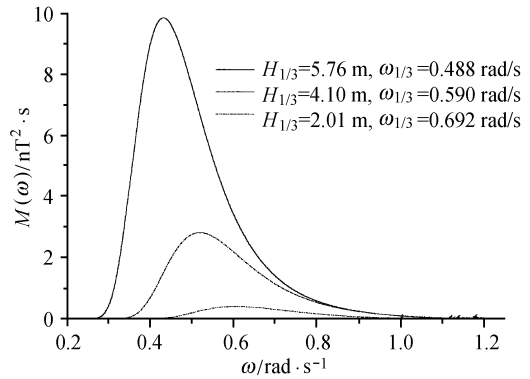


图 7 不同参数下 BM 谱感应磁场功率谱

6 总结

(1) 海浪感应磁场的功率谱与两部分有关, 一是海浪谱, 二是海浪- 磁场系统的传递函数. 第一个因素与风时、风区、风速以及风区是否有遮蔽物有关, 也就是说海浪感应磁场与产生海浪的因素和环境有关. 传递函数是建立在 Longuet- Higgins 的平稳正态海浪模型上的, 在海浪非线性效应不明显、基本平稳正态时, 可以按照经典随机过程关于平稳正态过程的理论来处理. 本文的推导和仿真表明, 在同一高度时, 不同参数、相同形式海浪谱感应磁场功率谱的相对变化基本与海浪谱的变化相同.

(2) 通过海浪感应磁场功率谱可反推海浪谱, 条件是海浪必须服从 Longuet- Higgins 的平稳正态模型, 而且要滤除磁干扰噪声, 因此海浪- 感应磁场的关系提供了一种求海浪谱的新的可能途径. 虽然海浪感应的磁场比较小, 但目前磁探仪的分辨率(0.01~ 0.10 nT)已经足够完成测量任务.

(3) 海浪- 磁场传递函数有一个峰值频率, 它的大小与传递函数在低于该峰值频率的行为和高度(磁探仪器的高度)基本无关, 可以计算出该峰值频率为 $\omega_0 = 0.071$ rad/s, 对应的 $T(\omega)$ 为 10^{-8} 数量级, 大于该频率, 传递函数将随高度发生变化, 高度越高, 衰减越快.

(4) 一般海浪谱的谱峰和传递函数的谱峰是错开的, 因此在计算中可以采用传递函数的简化形式. 感应磁场功率谱形状与对应海浪谱相似, 除了功率数量级变化外, 在海平面附近谱峰和峰值频率基本不变, 因此知道了谱参数后可以估计出感应磁场的一些参数.

(5) 感应磁场的总平均功率和谱峰随高度基本按照指数衰减. 总平均功率的数量级为: 风速参数为 16.24 m/s 的 PM 谱感应磁场总功率在海平面为 $1 \sim 10$ nT², 在高度为 150 m 时为 10^{-3} nT² 数量级. 地磁场的大小为 30 000~ 50 000 nT, 海浪感应磁场的数量级是微不足道的, 但在对水下磁性物质的航空磁探时, 即使目标磁矩非常大, 考虑到目标的深度, 在海上磁探浮标或磁探飞机接收到的目标信号往往与海浪磁场相近, 这时必须考虑海浪感应磁场的影响.

(6) 海浪感应磁场功率谱的等效噪声带宽随高度减小, 例如由计算可知, 风速参数为 16.24 m/s 的 PM 谱感应磁场等效噪声带宽从海平面的约 0.26 rad/s 到高度 150 m 时的约

0.11 rad/s, 即不超过 0.05 Hz, 同时峰频率随高度上升向低频移动, 但随高度变化较缓慢. 由这两点可知, 海浪感应磁场是一个窄带随机过程, 因此为了去除海浪磁场噪声, 可以根据峰值频率和等效带宽设计一个带阻滤波器滤掉该噪声.

(7) 当比较 JONSWAP 谱和 PM 谱感应磁场功率谱谱峰和峰值频率时, 发现 JONSWAP 谱感应的磁场功率谱峰值频率随高度变化不连续. 产生这种情况的原因是 JONSWAP 谱比 PM 谱多了一个峰升高因子, 因此感应磁场在某个高度范围内产生了双峰. 高度较低时高频谱峰较高; 随着高度上升, 高频谱峰将逐渐降低, 而低频谱峰将升高, 因而产生峰值频率不连续现象.

参考文献:

- [1] 文圣常, 余宙文. 海浪理论与计算原理[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [2] WEAVER J T. Magnetic variations associated with ocean waves and swell [J]. Journal of Geophysical Research, 1965, 70 (8): 1921—1929.

Computation of energy distribution of the magnetic field induced by ocean waves

TANG Jin-fei¹, GONG Shen-guang¹, WANG Jin-gen¹

(1. Department of Weaponry Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: With the aid of previous research on ocean wave spectrum and the magnetic field induced by ocean waves, the power transfer function of ocean wave-magnetic field system is determined. The peak value of the transfer function and the corresponding frequency are determined and the changes of these two quantities as a function of height are analyzed. According to the theoretical analysis, the analytical expression of the total magnetic power is determined and the equation that the peak-power frequency satisfies is provided. It is pointed out that the induced magnetic field is a narrow-band process. Finally, the power spectral density, total power, the maximum of the PSD, maximum frequency and equivalent frequency of induced magnetic field are calculated for some typical wave spectra.

Key words: ocean wave spectrum; magnetic field induced by ocean waves; power spectral density; narrow-band stochastic processes