

结合抛物型缓坡方程计算波浪辐射应力*

郑永红 沈永明 邱大洪

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 大连 116023)

摘 要 将波浪辐射应力与抛物型缓坡方程中的待求变量联系起来, 提出了一种计算辐射应力的新方法, 并用有限差分法对控制方程进行了数值求解. 数值结果表明这种方法精度高、编程简单、求解快速, 可用于实际大区域波浪辐射应力的计算.

关键词 辐射应力 抛物型缓坡方程 数值解 水波

中图分类号: O353.2

1 引言

辐射应力的概念是由 Longuet-Higgins 和 Stewart 首先提出的^[1~5], 它是波浪存在而产生的一种动量流, 其影响等价于作用在波浪运动水体上的正应力和切应力, 从而引起平均海水位的升降及环流的产生^[5,6]. 目前大多采用 Longuet-Higgins 和 Stewart 辐射应力公式来计算辐射应力, 该公式本身及编程比较简单, 可用于大区域简单地形上的波浪辐射应力计算. 其缺点是: (1) 只适用于简单的纯行进波; (2) 利用该公式计算辐射应力, 需要利用其他方程求出各点的波高和波向, 波向的求解可采用 Snell 定律、波数无旋方程或者波向程函方程, 对简单地形, 利用这些方程求解波向是有效的, 而对比较复杂的地形, 特别是存在波向线相交时, 波向的求解是十分困难的, 甚至不能有效地求出波向. 为了克服这些缺点, Copeland^[7]提出了将辐射应力分量的计算与双曲型缓坡方程相结合的方法, 但利用这种方法计算辐射应力相当复杂, 主要表现在: (1) 计算公式本身相当复杂; (2) 方程的离散比较复杂, 而且还需要对数值解进行比较复杂的校正. 为了使辐射应力的计算比较简单且可以用于实际大区域, 本文将辐射应力的计算公式与抛物型缓坡方程中的待求变量联系起来, 提出了一种辐射应力计算的新方法.

2 数学模型

2.1 辐射应力基本方程

对线性规则波, 辐射应力的基本方程^[8]为

本文于 2000-04-18 收到, 修改稿于 2000-07-31 收到.

* 国家自然科学基金重点资助项目(编号: 59839330); 国家自然科学基金委员会与香港研究资助局联合科研资助基金项目(编号: 49910161985).

第一作者简介: 郑永红, 男, 30 岁, 博士, 从事近海海洋环境水力学方面的研究工作.

$$S_{xx} = \frac{\rho g}{4} \left[\left| \frac{\partial \eta'}{\partial x} \right|^2 \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) + |\eta'|^2 \frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{2kh/\tanh 2kh - 1}{2k^2} \left(\left| \frac{\partial \eta'}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right|^2 - k^2 |\eta'|^2 \right) \right], \quad (1)$$

$$S_{yy} = \frac{\rho g}{4} \left[\left| \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right|^2 \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) + |\eta'|^2 \frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{2kh/\tanh 2kh - 1}{2k^2} \left(\left| \frac{\partial \eta'}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right|^2 - k^2 |\eta'|^2 \right) \right], \quad (2)$$

$$S_{xy} = \frac{\rho g}{4} \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \eta'}{\partial x} \frac{\partial \eta'^*}{\partial y} \right] \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right\}, \quad (3)$$

式中, S_{xx} , S_{yy} , S_{xy} 为辐射应力分量; ρ 为密度; g 为重力加速度; η' 为与时间无关的复波面函数; η'^* 为 η' 的共轭复数; k 为波数, 可根据当地水深由色散关系 $\omega^2 = gk \tanh kh$ 求出, 其中 ω 为波浪圆频率, h 为当地静水深。

对以 α 角入射的纯行进波, 令复波面 η' 为

$$\eta' = A \exp[i(k \cos \alpha x + k \sin \alpha y)], \quad (4)$$

式中, A 为当地实数波振幅。将上式代入式(1)~(3), 可得 Longuet-Higgins 和 Stewart 辐射应力公式:

$$S_{xx} = S_{11} \cos^2 \alpha + S_{22} \sin^2 \alpha, \quad (5)$$

$$S_{yy} = S_{11} \sin^2 \alpha + S_{22} \cos^2 \alpha, \quad (6)$$

$$S_{xy} = S_{yx} = S_{11} \cos \alpha \sin \alpha - S_{22} \cos \alpha \sin \alpha, \quad (7)$$

式中,

$$S_{ij} = E \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{2kh}{\sinh 2kh} & 0 \\ 0 & \frac{kh}{\sinh 2kh} \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, 2), \quad (8)$$

其中 $E = \rho g A^2 / 2$, 为波能。正如前言所述, 对比较复杂的地形, 波向的计算是相当困难的, 因此应用这种方法计算复杂地形上的波浪辐射应力受到限制。

当计算域中波浪主传播方向上的反射较小且波向与主传播方向的夹角不太大时, 抛物型缓坡方程是研究大区域复杂地形上的波浪折绕射效应的一种有效数学模型。文献[9]在推导以复振幅 $A'(x, y)$ 为待求变量的抛物型缓坡方程时, 采用了下面的关系式:

$$\eta'(x, y) = A'(x, y) \exp \left[i \int^x \bar{k}(x) dx \right], \quad (9)$$

式中, $\bar{k}(x)$ 为纵轴方向(y 方向)上 $k(x, y)$ 的平均值。根据上式, 理论上可以由抛物型缓坡方程首先计算出 $A'(x, y)$, 再由式(9)计算出 $\eta'(x, y)$, 然后根据式(1)~(3)计算出辐射应力分量, 但这样做是很不经济的, 原因是式(9)中的 $\eta'(x, y)$ 含有随 x 快速变化的量 $\exp \left[i \int^x \bar{k}(x) dx \right]$, 此时如要高精度地计算辐射应力, 则每个波长必须布置很多网格点, 从而使

这种直接算法不能用于大区域的辐射应力计算. 为了用于大区域, 以 S_{xx} 为例来推导可用于大区域的辐射应力计算公式. 由式(9)得

$$\frac{\partial \eta'}{\partial x} = \exp\left(i \int^x \bar{k} dx\right) \left(\frac{\partial A'}{\partial x} + iA' \bar{k} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial y} = \exp\left(i \int^x \bar{k} dx\right) \frac{\partial A'}{\partial y}, \quad (11)$$

将式(10)、(11)代入式(1)得

$$S_{xx} = \frac{\rho g}{4} \left[\left| \frac{\partial A'}{\partial x} + i\bar{k}A' \right|^2 \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) + |A'|^2 \frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{2kh/\tanh 2kh - 1}{2k^2} \left(\left| \frac{\partial A'}{\partial x} + i\bar{k}A' \right|^2 + \left| \frac{\partial A'}{\partial y} \right|^2 + k^2 |A'|^2 \right) \right]. \quad (12)$$

同理可得

$$S_{yy} = \frac{\rho g}{4} \left[\left| \frac{\partial A'}{\partial y} \right|^2 \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) + |A'|^2 \frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{2kh/\tanh 2kh - 1}{2k^2} \left(\left| \frac{\partial A'}{\partial x} + i\bar{k}A' \right|^2 + \left| \frac{\partial A'}{\partial y} \right|^2 + k^2 |A'|^2 \right) \right], \quad (13)$$

$$S_{xy} = \frac{\rho g}{4} \left\{ \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial A'}{\partial x} + i\bar{k}A' \right) \frac{\partial A'^*}{\partial y} \right] \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right\}, \quad (14)$$

式中, A'^* 为复数 A' 的共轭复数. 式(12)~(14)即为本文结合抛物型缓坡方程导出的可用于大区域辐射应力的计算公式.

2.2 基本方程的求解

这里采用小角度入射抛物型缓坡方程^[9]和极值原理抛物型缓坡方程^[10]与式(12)~(14)结合起来计算辐射应力. 抛物型缓坡方程采用 Crank - Nicolson 格式离散, 具体可参考文献[9], 然后结合适当的边界条件^[9~11]采用追赶法进行求解; 式(12)~(14)中的一阶导数采用中心差分格式离散. 当采用抛物型缓坡方程得出计算域中各点的 $A'(x, y)$ 后, 就可根据式(12)~(14)计算出各点的辐射应力分量.

3 模型验证及误差分析

3.1 模型验证

数学模型的数值解需要与实测资料或理论解进行对比, 才能说明其优劣. 由于没有可以利用的实测辐射应力资料, 因此模型的验证只能与解析解进行对比. 本节将对均匀斜坡直平行等深线上的辐射应力进行计算, 因为对这种地形, 如果仅考虑波浪的折射和浅化效应, 则波高和波向存在解析解, 从而利用式(5)~(7)可以求出辐射应力分量的解析解.

假定一计算域为 $4\ 200\ \text{m} \times 2\ 100\ \text{m}$, 在该地形上的水深分布为

$$h(x, y) = 45.0 - x/100.0. \quad (15)$$

初始入射波向与 x 轴的夹角为 α_0 , 这里考虑 $\alpha_0 = 0^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ 四种不同的波浪初始入射波向, 波周期为 8 s, 入射波高为 1.0 m, 数值计算采用的空间步长对不同的 α_0 均为 $\Delta x = \Delta y = 14$

m , 即在水深最浅处每个波长布置 4 个节点. 对这种地形, 只考虑波浪折射和浅化效应的波向的解析解为

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{k_0}{k} \sin\alpha_0\right), \quad (16)$$

波振幅的解析解为

$$A = A_0 \left[\frac{k \cos\alpha_0}{k_0 \cos\alpha} \frac{1 + \frac{2k_0 h_0}{\sinh 2k_0 h_0}}{1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}} \right]^{0.5}, \quad (17)$$

式中, 所有带下标 0 的量均为波浪入射位置的参数; α 和 A 分别为待求点的波向和波振幅.

图 1 为 $\alpha_0 = 0^\circ$ 时采用小角度抛物型缓坡方程的辐射应力的数值解与解析解的比较, 图中 S_{xx} , S_{yy} 和 S_{xy} 分别表示应用抛物型缓坡方程和式(12)~(14)计算出的辐射应力分量 S_{xx} , S_{yy} 和 S_{xy} , 而 S_{xe} , S_{ye} 和 S_{xye} 分别表示应用式(16)、(17)以及式(5)~(7)得出的辐射应力分量 S_{xx} , S_{yy} 和 S_{xy} 的解析解, 可以看出此时数值解与解析解完全重合.

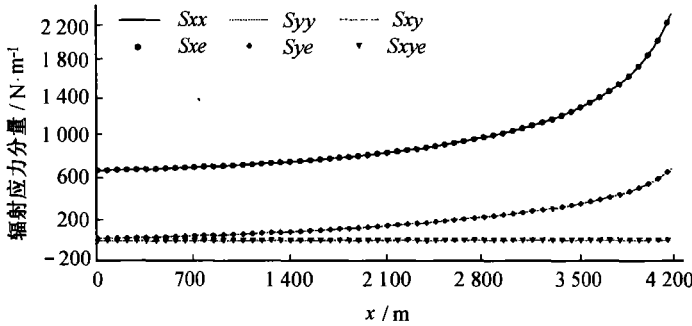


图 1 $\alpha_0 = 0^\circ$ 时应用小角度抛物型缓坡方程的辐射应力的数值解与解析解

图 2 为 $\alpha_0 = 20^\circ$ 时采用小角度抛物型缓坡方程的辐射应力的数值解与解析解的比较, 此时由抛物型缓坡方程和式(12)~(14)联立的数值解与解析解十分接近, 最大偏差小于 5%. 图 3 为 $\alpha_0 = 30^\circ$ 时采用小角度抛物型缓坡方程的辐射应力的数值解与解析解的比较, 此时数值解与解析解之间的偏差进一步加大, 最大相对偏差出现在 $x = 4200 \text{ m}$ 处, 约为 10%.

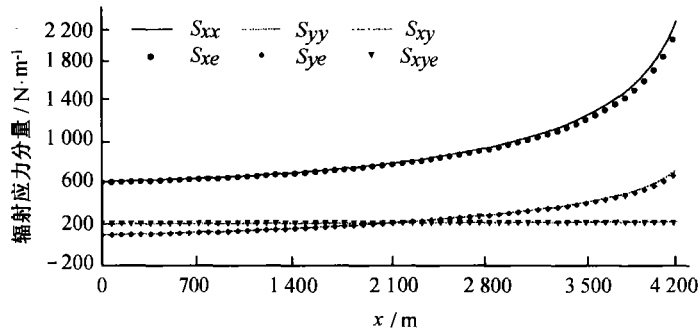


图 2 $\alpha_0 = 20^\circ$ 时应用小角度抛物型缓坡方程的辐射应力的数值解与解析解

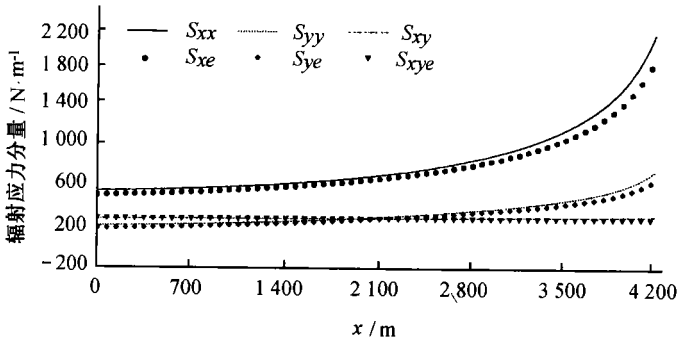


图3 $\alpha_0 = 30^\circ$ 时应用小角度抛物型缓坡方程的辐射应力的数值解与解析解

图4为 $\alpha_0 = 40^\circ$ 时采用小角度抛物型缓坡方程的辐射应力的数值解与解析解的比较,此时数值解与解析解之间的偏差很大,最大相对偏差达25%以上,可以看出当 $\alpha_0 > 40^\circ$ 时,应用小角度抛物型缓坡方程来计算波浪辐射应力是不合适的.图5为 $\alpha_0 = 40^\circ$ 时采用极值原理抛物型缓坡方程的辐射应力的数值解与解析解的比较,显然,图5中辐射应力的数值解与解析解的相对偏差比图4中对应的相对偏差要小得多,最大相对偏差小于10%,也就是说,当波向与 x 轴的夹角较大时,极值原理模型和式(12)~(14)联立得到的辐射应力结果比小角度入射模型与式(12)~(14)联立得到的辐射应力结果要好得多,因此应用本文方法计算辐射应力时,需根据具体的入射波向来选择合适的抛物型缓坡方程.

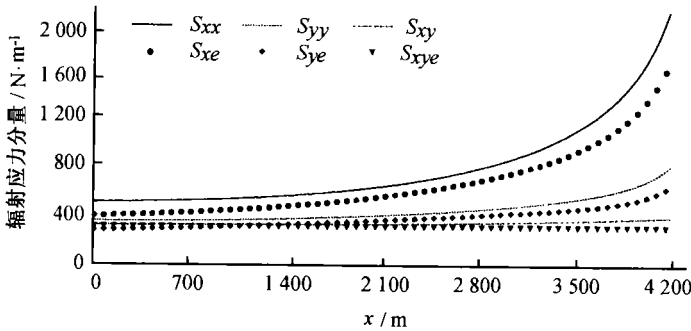


图4 $\alpha_0 = 40^\circ$ 时应用小角度抛物型缓坡方程的辐射应力的数值解与解析解

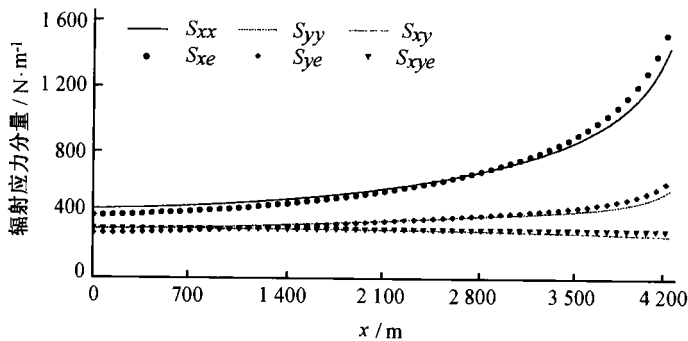


图5 $\alpha_0 = 40^\circ$ 时应用极值原理抛物型缓坡方程的辐射应力的数值解与解析解

3.2 误差分析

由前面的结果可以看出,当波向与 x 轴的夹角较小时,应用小角度入射抛物型缓坡方程计算辐射应力可得到较高精度的结果,而当角度较大时,应用小角度入射抛物型缓坡方程计算得到的辐射应力与解析解之间会产生较大偏差,原因主要是小角度入射抛物型缓坡方程在初始入射角度较大时计算得到的复振幅 $A'(x, y)$ 的误差较大,这一限制可采用其他适当的大角度入射抛物型缓坡方程来克服(如图 5 采用极值原理模型使数值解与解析解的相对偏差小许多).从理论上说,本文提出的辐射应力计算方法是十分有效的,但需要根据具体情况选择合适的抛物型缓坡方程.此外,由于抛物型缓坡方程本身受入射角度不能太大的限制,因此本文提出的辐射应力计算方法也受此限制.

4 结束语

辐射应力是研究近岸波生流、波流相互作用、波浪增减水等现象的一个非常重要的物理量,目前对实际大区域复杂地形上的波浪辐射应力的计算还没有一个较好的方法.针对这一问题,本文提出了采用抛物型缓坡方程计算辐射应力的方法,导出了一个可用于大区域波浪辐射应力计算的公式,并用该公式对较大区域均匀斜坡上的波浪辐射应力进行了数值模拟,数值结果与解析解的比较表明,本文提出的方法具有精度高、编程简单、求解快速和可用于大区域波浪辐射应力计算的优点,但在具体应用中,需根据具体情况选择适当的抛物型缓坡方程,才能使计算的辐射应力结果更为理想.

参考文献

- 1 Longuet-Higgins M S, Stewart R W. Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents. *J Fluid Mech*, 1960, 8: 565~583
- 2 Longuet-Higgins M S, Stewart R W. The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents. *J Fluid Mech*, 1961, 10: 529~549
- 3 Longuet-Higgins M S, Stewart R W. Radiation stress and mass transport in gravity waves with application to surf beats. *J Fluid Mech*, 1962, 13: 481~504
- 4 Longuet-Higgins M S, Stewart R W. Radiation stress in water waves: a physical discussion with applications. *Deep-Sea Res*, 1964, 11: 529~562
- 5 Longuet-Higgins M S. Longshore currents generated by obliquely incident sea waves. *J Geophys Res*, 1970, 75: 6 778~6 801
- 6 Noda E K. Wave-induced nearshore circulation. *J Geophys Res*, 1974, 79: 4 097~4 106
- 7 Copeland G J M. Practical radiation stress calculations connected with equations of wave propagation. *Coastal Engineering*, 1985, 9: 195~219
- 8 丁平兴,孔亚珍,史峰岩.水波的辐射应力及其计算. *华东师范大学学报*, 1998, 1: 82~87
- 9 Kirby J T, Dalrymple R A. A parabolic equation for the combined refraction-diffraction of Stokes waves by mildly varying topography. *J Fluid Mech*, 1983, 136:453~466
- 10 Kirby J T. Rational approximations in the parabolic equation method for water waves. *Coastal Engineering*, 1986, 10:355~378
- 11 Kirby J T. Open lateral boundary condition for application in the parabolic equation method. *J Waterw Port Coastal Eng, ASCE*, 1986, 112: 460~465

Calculation of wave radiation stresses connected with the parabolic mild-slope equation

Zheng Yonghong,¹ Shen Yongming,¹ Qiu Dahong¹

1. *State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023*

Abstract—A new method for the solution of wave radiation stresses is proposed by linking wave radiation stresses with the variables in the parabolic mild-slope equation. The governing equations are solved numerically by the finite difference method. Numerical results show that the new model with high accuracy can be efficiently solved with little programming effort, and can be applied to the solution of wave radiation stresses in large coastal areas.

Key words Radiation stresses, parabolic mild-slope equation, numerical solution, water waves