

非线性波浪时域计算的三维耦合模型*

齐 鹏 王永学 邹志利 邱大洪

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 大连 116024)

摘 要 将计算区域 Ω 划分为内域 Ω_1 和外域 $\Omega_2 (\Omega_2 = \Omega - \Omega_1)$, 外域控制方程采用改进线性频散特性的二维 Boussinesq 方程, 用预报-校正法数值求解; 结构物附近的内域控制方程为三维 Navier-Stokes 方程, 由 VOF 方法数值求解. 通过在外域和内域相匹配的交界面上设置合适的速度和波面边界条件, 建立了三维非线性波浪时域计算的耦合模型. 模拟试验表明: (1) 耦合模型数值波浪水池可以产生稳定的、重复性较好的波动过程; (2) 用耦合模型数值波浪水池求解较大浅水区域上的非线性波浪数值计算问题可以取得较高的计算效率, 同时又能得出结构物附近的复杂流场.

关键词 耦合模型 波浪 Boussinesq 方程/Navier-Stokes 方程 流体体积 (VOF) 方法

中图分类号: P731.22

1 引言

在过去的 20 a 多的时间内, 随着高速计算机和计算流体力学的发展, 建立数值波浪水槽或水池模型在计算机上进行试验, 以部分或全部取代实验室物理模拟试验得到了越来越广泛的应用, 例如基于势流理论的波浪数值模型^[1]. 人们也推导出了多种 Boussinesq 型浅水波方程^[2~5], 它们的线性频散关系得到了较大的改进, 能够较好地模拟港口和海岸带的非线性波浪变形. 由于采用了深度方向上的平均化处理将三维问题降为二维, 用 Boussinesq 模型求解较大区域上的波浪变形问题, 计算效率比较高, 但流场沿深度方向上的变化特征不能由计算直接得到, 因此在结构物附近当流动在深度方向上的变化不容忽视时, Boussinesq 模型难以考虑沿水深变化的速度场. 近年来流体体积 (VOF) 方法被应用到了非线性波浪数值模拟中^[6,7]. VOF 方法直接求解原始的三维 N-S 方程, 结合自由面追踪技术, 能够给出复杂的三维流场特征和模拟波浪破碎, 但 VOF 方法的计算量大, 效率低, 因而应用于三维问题时其计算域将严重地受到限制.

本文于 2000-04-20 收到, 修改稿于 2000-07-23 收到.

* 教育部跨世纪优秀人才基金资助项目 (编号: 教技厅[1997]2 号).

第一作者简介: 齐 鹏, 男, 37 岁, 博士, 大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室海岸工程专业.

本文结合 Boussinesq 模型和 VOF 方法数值模型各自的特点,建立了三维非线性波浪时域计算的耦合模型,该模型在做较大区域上波浪变形数值计算时能够取得较高的计算效率,同时又能得到结构物附近的复杂流场。

2 耦合模型

将图 1 所示的矩形计算域 Ω 划分为 Ω_1 和 Ω_2 两个子域,内域 Ω_1 代表包含结构物的近场流体,其控制方程为三维 N-S 方程,由 VOF 法数值求解;外域 Ω_2 ($\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$) 的流体控制方程为二维 Boussinesq (Madsen) 方程,用预报-校正解法数值求解,两模型在它们的交界面上满足速度和波面连续的匹配边界条件。

2.1 Ω_1 域的控制方程

内域 Ω_1 的流体控制方程为连续性方程和不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程。我们取笛卡儿直角坐标系 (x, y, z) , 其中 z 为垂向坐标(向上为正), u, v 和 w 分别为对应于 x, y 和 z 方向的速度分量, ρ 为流体密度, p 为压力, g 为重力加速度, ν_k 为运动学黏性系数。连续性方程与动量方程分别为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g + \nu_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (4)$$

数值求解基本方程的有限差分网格由长方体单元组成。图 2 为差分离散的单元体结构。长方体单元在 x, y 和 z 方向上的尺度分别为 $\delta x, \delta y$ 和 δz , 速度分量 $u_{i+1/2, j, k}, v_{i, j+1/2, k}$ 和 $w_{i, j, k+1/2}$ 分别定义于单元体的右侧面、后侧面和顶面的中心, 压力 $p_{i, j, k}$ 定义于单元体的中心。

为有效地判断和追踪每一时间步上流体自由表面的位置, VOF 方法中引入流体体积函数 $F(x, y, z, t)$, 它是指某一时刻某单元体内流体所占有的体积与单元体所能容纳的流体体积之比, F 也位于单元体的中心, 并满足

$$\frac{\partial}{\partial t} F + \frac{\partial}{\partial x} (uF) + \frac{\partial}{\partial y} (vF) + \frac{\partial}{\partial z} (wF) = 0. \quad (5)$$

基本方程 (1)~(4) 的差分离散、求解步骤以及自由表面的追踪过程等可参照有关文献^[8]。

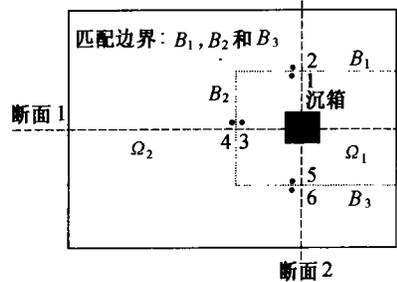


图 1 耦合模型平面布置图

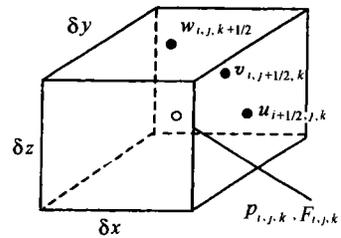


图 2 差分离散单元体结构

2.2 Ω_2 域的控制方程

外域 Ω_2 的流体控制方程为 Madsen 和 Sorensen 提出的新型 Boussinesq 方程^[3], 由连续性方程和动量方程组成:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial [(h + \eta)u]}{\partial x} + \frac{\partial [(h + \eta)v]}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left(\frac{1}{3} + B \right) h \left[\frac{\partial^3 (hu)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 (hv)}{\partial x \partial y \partial t} \right] - Bgh [h(\eta_{xxx} + \eta_{xyy}) + h_x(2\eta_{xx} + \eta_{yy}) + h_{xx}\eta_x + h_{xy}\eta_y + h_y\eta_{xy}] = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \left(\frac{1}{3} + B \right) h \left[\frac{\partial^3 (hv)}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^3 (hu)}{\partial x \partial y \partial t} \right] - Bgh [h(\eta_{xxy} + \eta_{yyx}) + h_y(2\eta_{yy} + \eta_{xx}) + h_{yy}\eta_y + h_{xy}\eta_x + h_x\eta_{xy}] = 0, \tag{8}$$

式中, x 和 y 为水平坐标; u 和 v 为对应深度的平均速度; η 为波面升高; h 为静水深; B 为代表线性频散关系的因子, 这里取 $B = 1/21$. 变量定义在空间交错网格上, 微分方程按照全隐式格式离散, 并由预报-校正算法迭代求解.

2.2 匹配边界条件及耦合求解过程

设置合理的匹配边界条件, 将内域与外域通过它们的三个交界面衔接起来, 是顺利实现内域和外域耦合求解的关键. 以图 1 中的交界面 B_2 为例, 对于 Ω_1 域来说, B_2 右侧相邻单元层编号为 $(2, j, k)$, 在 VOF 模型中是计算单元, 而其左侧相邻单元层 $(1, j, k)$ 是用于设置边界条件的虚拟单元层; 对于 Ω_2 域来说, B_2 左侧相邻单元编号为 (MB, j) , 在 Boussinesq 模型中是计算单元, 而其右侧相邻单元 $(MB + 1, j)$ 是用于设置边界条件的虚拟单元. 对于整个计算域 Ω , 单元层 $(1, j, k)$ 与单元层 (MB, j) , 单元层 $(2, j, k)$ 与单元层 $(MB + 1, j)$ 在水平位置上是重叠的. 在图 3 所示的交界面 B_2 两侧相邻单元(重叠区)及变量位置示意图中, 上标(1)和(2)将 Ω_1 域中的速度分量与 Ω_2 域中的速度分量区分开来, 而 F 和 η 分别为 Ω_1 域和 Ω_2 域中的流体体积函数和波面升高.

数值求解 Ω_2 域 Boussinesq 模型时, 紧邻 B_2 右侧一层边界单元 $(MB + 1, j)$ 上的速度值由对应的 VOF 法计算域的编号为 $(2, j, k)$ 的单元的对应该速度按深度平均值赋予, 而其波面值由上述重叠区中 VOF 法计算域对应的 F 值沿水深累加给出. 若取静水深为 h , VOF 法计算域在水深方向上被增量为 δz 的网格离散成 $KM1$ 个单元, 则上述赋值关系可表示为

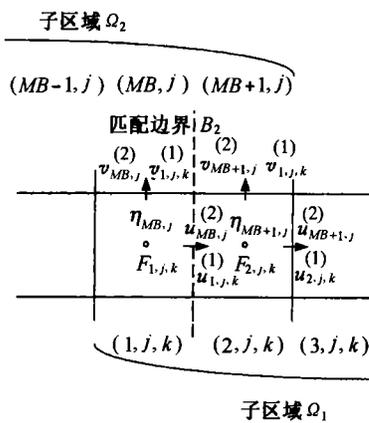


图3 交界面 B_2 两侧相邻单元及变量位置示意图

$$\left. \begin{aligned} \eta_{MB+1, j} &= \sum_{k=1}^{KM1} F_{2, j, k} \delta z_k - h \\ u_{MB+1, j}^{(2)} &= \frac{1}{D} \sum_{k=1}^{KM1} u_{2, j, k}^{(1)} F_{2, j, k} \delta z_k \\ v_{MB+1, j}^{(2)} &= \frac{1}{D} \sum_{k=1}^{KM1} v_{2, j, k}^{(1)} F_{2, j, k} \delta z_k \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

其中 $D = h + \eta = \sum_{k=1}^{KM1} F_{2, j, k} \delta z_k$

数值求解 Ω_1 域的 VOF 模型时,重叠区中交界面 B_2 左侧虚拟单元层 $(1, j, k)$ 上的速度值由 Boussinesq 计算域的对应单元 (MB, j) 上的速度赋予,然而因数值求解 Boussinesq 方程得到的速度 u 和 v 为深度平均速度 \bar{u} 和 \bar{v} ,而 VOF 方法的边界条件要求深度方向上各个单元层的速度 u, v 和 w ,因而有必要依据 Boussinesq 方程的数值计算结果(波面升高 η 和深度平均速度 \bar{u} 和 \bar{v})为其重构三维速度场.据参考文献[9]的推导,对于小参数 $\mu (= kh \ll 1, k$ 为波数),平均速度 \bar{u} 和 \bar{v} 在相应的实际水平速度的深度展开式中占 μ^0 阶,是最重要的部分,其后的项量级在 μ^2 阶以上.本文的计算程序中拟直接采用 Boussinesq 模型得到的(平均)速度.对垂向速度 w ,Boussinesq 模型不能直接给出,必须依据现有结果 $(\eta, \bar{u}$ 和 $\bar{v})$ 为其重构垂向速度.尺度分析^[9]显示实际垂向速度的首项量级为 μ^2 阶,我们就取到这一阶.最后,VOF 方法的边界单元赋值表达式为

$$\left. \begin{aligned} u_{1,j,k}^{(1)} &= u_{MB,j}^{(2)} \\ v_{1,j,k}^{(1)} &= v_{MB,j}^{(2)} \\ w_{1,j,k}^{(1)} &= -(h+z) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{MB,j}^{(2)} \end{aligned} \right\} k = 1, KM1 \quad (10)$$

式中,仍用 u 和 v 表示深度平均速度(\bar{u} 和 \bar{v}).流体体积函数 $F_{1,j,k}$ 由下式给出:

$$F_{1,j,k} = \begin{cases} 1 & (\eta_{MB,j} + h) > z_{k+1/2}, \\ \frac{(\eta_{MB,j} + h) - z_{k-1/2}}{\delta z_k} & z_{k+1/2} \geq (\eta_{MB,j} + h) \geq z_{k-1/2}, \\ 0 & (\eta_{MB,j} + h) < z_{k-1/2}, \end{cases} \quad (11)$$

式中, $z_{k-1/2}$ 和 $z_{k+1/2}$ 分别是空间单元 $(1, j, k)$ 下表面和上表面中心处的竖向坐标.

在 Ω_2 域的左边界设置规则波入射条件,其他边界设置成开边界条件.模型的耦合求解过程为 Boussinesq 模型与 VOF 模型同时运行,边界重叠区的赋值交互进行,即对某一时间步 t^n ,首先调用 Ω_2 域计算模型,交界面 B_2 处的边界条件由式(9)提供(交界面 B_1 和 B_3 处的边界条件与 B_2 处的类似),迭代求解 Boussinesq 模型; Ω_2 域在当前时间步的计算完成后,调用 Ω_1 域的 VOF 模型,其左侧面(即 B_2 处)及后侧面和前侧面的边界条件参照式(10)和(11)给出.在 VOF 方法完成迭代求解后,参照式(9)计算出 Ω_2 域在各匹配边界上的值,作为下一时间步 t^{n+1} 的 Ω_2 域计算的匹配边界条件,重复上述两域交替的耦合求解过程.

3 模型验证与结果

为了检验本文所建立的耦合计算模型匹配边界条件的有效性和在耦合模型下数值波浪水池中波浪的传播特性,首先考虑 Ω_1 域中没有物体加入的情形.对入射规则波,其波浪参数为周期 $T = 4.0$ s,波高 $H_0 = 0.5$ m,水深 $d = 5.0$ m.计算域如图 1 所示,取数值波浪水池全域长(x 方向)为 150 m,宽(y 方向)为 150 m,按等网格 $\delta x = \delta y = 1.5$ m 划分成 x 方向和 y 方向,各占 100 个单元,其中 Ω_1 域在 x 方向占 50 个单元(即 75 m), y 方向占 40 个单元(即 60 m),深度 z 方向上按等网格 $\delta z = 0.75$ m 划分为 11 层.图 4 为斜入射(入射角 $\alpha = 10^\circ$)情形下一组每隔 10 s 输出的全场三维波面分布,图中两域之间波面衔接是光滑而连续的.图 5 给出了三组监测点处波面升高和水平速度分量的时间历程比较(入射波浪条件与图 4 相同).三组监测点(参照图 1)沿断面 1 和断面 2 布置,它们的具体位置为:跨边界 B_1 的相邻监测点 1 和

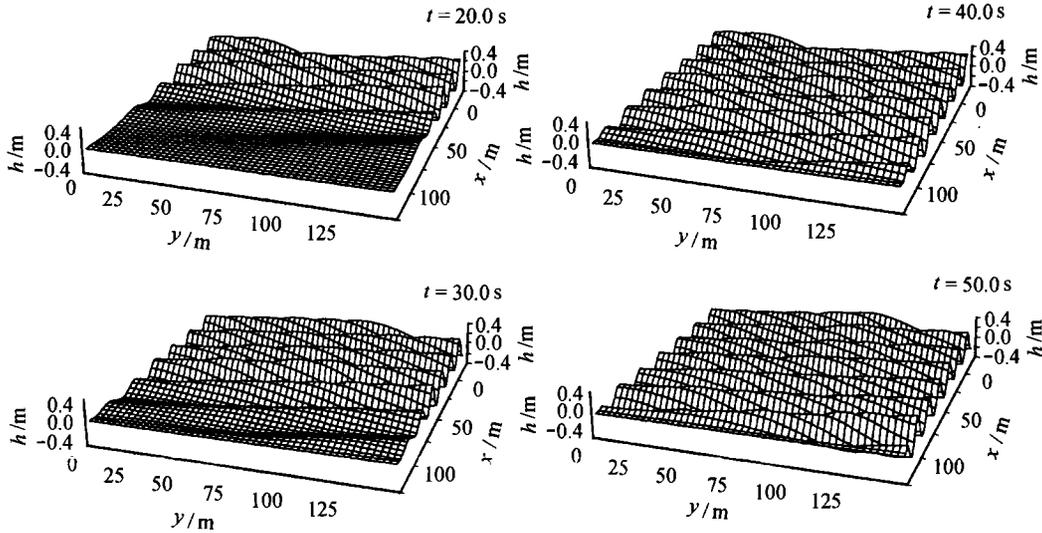


图4 整个计算域上三维波面时间演变

$$H_0 = 0.5 \text{ m}, T = 4.0 \text{ s}, d = 5.0 \text{ m}, \alpha = 10^\circ$$

2 分别占据单元(76, 32)和(76, 31), 跨边界 B_2 的相邻监测点 3 和 4 分别占据单元(52, 51)和(51, 51), 跨边界 B_3 的相邻监测点 5 和 6 分别占据单元(76, 71)和(76, 72). 这进一步验证了耦合模型的匹配边界赋值(尤其在斜入射情形下)是有效的, 表明目前情况下耦合模型中对匹配边界的赋值是有效的, 波浪能够较好地经由 Ω_2 域和 Ω_1 域传播.

对耦合模型的数值结果进行模型试验验证是十分必要的, 但根据本文目前的工作进展, 为简单起见, 文中就图 4 的耦合模型计算域尺寸和波浪参数直接用 VOF 方法做了波浪计算. 图 6 为耦合模型得出的波面变化历程(实线)与单纯用 VOF 方法得到的结果(虚线)比较. P_1 , P_2 和 P_3 三个监测点在整个计算域中的位置分别对应单元(76, 40)、单元(76, 50)和单元(76, 60), 可见耦合模型模拟波面过程能够保证原三维模型模拟的精度.

其次, 我们考虑在 Ω_1 域中加入方柱形大尺度坐底结构物(沉箱). 为简单而又能说明问题起见, 考虑结构物潜没水中, 不穿刺水面, 并且因结构物影响的波浪变形未致破碎. 入射规则波的波浪参数与图 4 相同. $180 \text{ m} \times 150 \text{ m}$ 的水平计算域按等网格($\delta x = \delta y = 1.5 \text{ m}$)离散为 120×100 个单元, 其中 Ω_1 域水平方向为 60×40 个单元, 深度方向按 $\delta z = 0.75 \text{ m}$ 等网格划分为 10 层. 坐底结构物的长和宽均为 15.0 m , 高为 2.25 m , 其中心在整个计算域中的坐标为 $x = 127.5 \text{ m}$, $y = 75.0 \text{ m}$. 图 7 是置入沉箱情形下整个计算域上典型三维波面分布. 图 8 是作用在沉箱上的非线性波浪力的历时曲线, 图中粗实线为本文耦合模型的计算结果, 细实线为整个计算域单独用 VOF 方法计算的结果. 由图可见耦合模型在计算近场三维问题中可以给出相当好的近似结果.

最后, 为评估所建立的耦合模型解决三维数值问题的计算效率, 取与图 6 同样的算例, 整个计算域单独用 Boussinesq 模型、VOF 模型和耦合模型(Ω_1 域在水平方向上占全域网格数的 $1/5$)分别进行了计算(迭代精度取 10^{-3}). 在 PII-400, 64 Mbit 内存的微机上计算到 $t = 50.0 \text{ s}$ 结束. 表 1 给出了三种数值模型对上述算例的计算时间. 由比较可见, 耦合模型具有较高的计算效率.

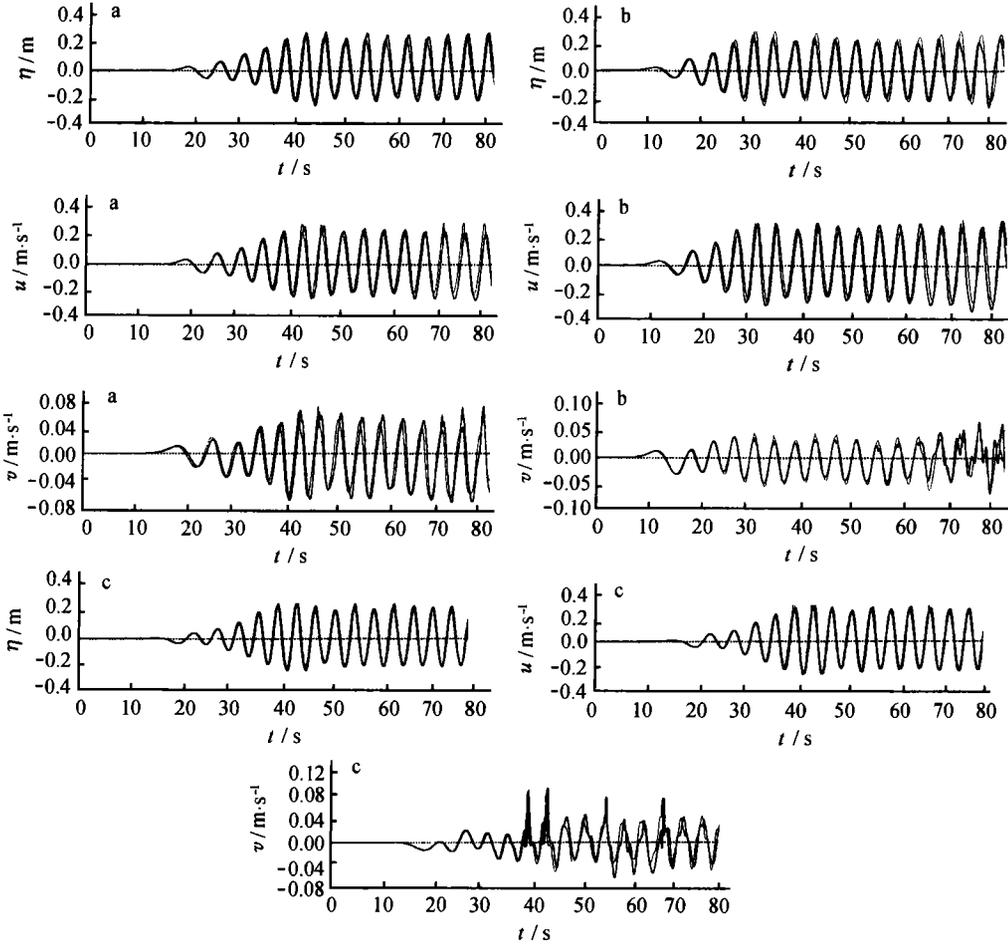


图5 监测点1和2(a),3和4(b)及5和6(c)分别跨边界 B_1 , B_2 和 B_3 处的波面高度 η 及水平速度 u 和 v 的时间历程比较

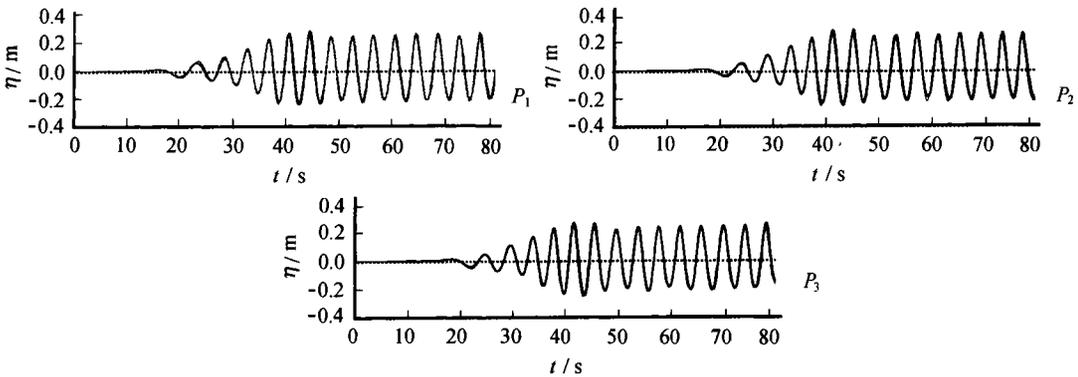


图6 监测点 P_1 , P_2 和 P_3 波面高度 η 的时间历程比较
粗实线为耦合模型计算结果,细实线为VOF方法计算结果

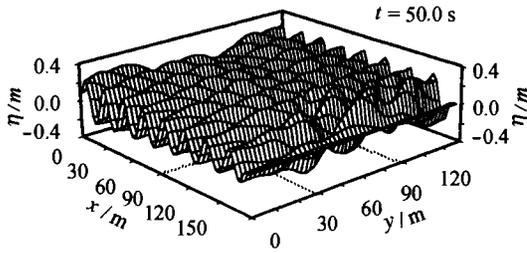


图7 Ω_1 中放置沉箱情形下整个计算域上典型的三维波面
 $H_0 = 0.5 \text{ m}$, $T = 4.0 \text{ s}$, $d = 5.0 \text{ m}$, $\alpha = 10^\circ$

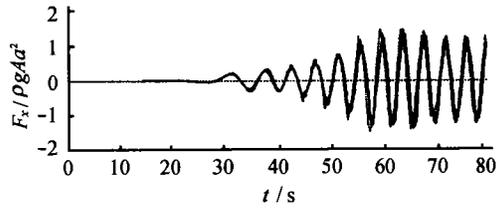


图8 对于计算域中放置沉箱的情形,分别由耦合模型(粗实线)和VOF方法(细实线)计算沉箱所受水平力 F_x (已无量纲化, a 为方柱宽度, $A = H/2$)的比较
 $H_0 = 0.5 \text{ m}$, $T = 4.0 \text{ s}$, $d = 5.0 \text{ m}$, $\alpha = 0^\circ$

4 结论

本文建立的非线性波浪时域计算的三维耦合模型,结合了Boussinesq模型和VOF模型的优点,采取了直接速度和波面的匹配边界条件.数模试验表明,耦合模型具有以下特点:

衔接计算域 Ω_2 和 Ω_1 的匹配边界条件的设置是有效的,耦合求解结果较为理想,波浪经由 Ω_2 域和 Ω_1 域的传播过程是连续和光滑的.

对同一计算域用Boussinesq模型、VOF模型和耦合模型单独进行模拟结果表明,耦合模型解决建筑物周围三维流场问题具有较高的计算效率和精度,在经过进一步的检验和完善后,有望成为高效率地解决大区域港口波浪数模过程中同步得到结构物附近复杂流场的计算问题的有效手段.

参考文献

- Kim C H, Clement A H, Tanizawa K. Recent research and development of numerical wave tanks—A review. International Journal of Offshore and Polar Engineering, 1999, 9(4): 241~256
- Madsen P A, Murray R, Sorensen O R. A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Coast Eng. 1991, 15: 371~388
- Madsen P A, Sorensen O R. A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry. Coast Eng, 1992, 18: 183~204
- Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. Journal of Waterways, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, 1993, 119(6): 618~638
- 邹志利. 高阶Boussinesq水波方程. 中国科学(E辑), 1997, 27(3): 460~473
- 王永学. VOF方法数模直墙式建筑物前的波浪破碎过程. 自然科学进展——国家重点实验室通讯, 1993, 3(6): 553~559
- 王永学. 无反射造波数值波浪水槽. 水动力学研究与进展, 1994, 9(2): 205~214
- 王永学, Su Tsung Chow. 圆柱容器液体晃动问题的数值计算. 空气动力学学报, 1991, 9(1): 112~119

表1 不同模型的计算时间($T = 4.0 \text{ s}$,
 $H_0 = 0.5 \text{ m}$, $d = 5.0 \text{ m}$, $\alpha = 10^\circ$)

	Boussinesq 模型	耦合模型	VOF 模型
计算时间/min	293	353	467

9 梅强中. 水波动力学. 北京: 科学出版社, 1984. 279~284

A three-dimensional coupled model for time-domain calculation of nonlinear waves

Qi Peng,¹ Wang Yongxue,¹ Zou Zhili,¹ Qiu Dahong¹

1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024

Abstract—The coupled model, which is the combination of Boussinesq equations and the general description for three-dimensional (3-D) flows with the volume of fluid (VOF) method, has been developed for the numerical simulations of nonlinear waves in a large domain. That is, the whole computational domain Ω is divided into two sub-regions. In the near-field around a structure, Ω_1 , the flow is governed by 3-D Navier – Stokes equations and numerically solved by the VOF method. Whereas in the sub-region Ω_2 ($\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$), the flow is governed by two-dimensional Boussinesq equations and numerically solved with the predictor – corrector algorithm. The velocity and the wave surface elevation are matched to the common boundaries of the two sub-regions. Numerical verifications have been conducted for the case of wave propagation and interaction with a square caisson. It is shown that the coupled model is effective on computing nonlinear waves in a large domain with taking into account the complicated flow field near a structure.

Key words Coupled model, waves, Boussinesq equations/Navier – Stokes equations, VOF method