

# 近岸大区域水波数学模型及其数值求解\*

郑永红 沈永明 邱大洪

(大连理工大学海岸与近海工程国家重点实验室, 大连 116023)

夏 进

(大连市环境科学设计研究院, 大连 116023)

**摘 要** 从水波发展方程出发, 导出了大区域缓坡水波数学模型, 并采用交错网格系统下的有限差分法对该数学模型进行了数值求解, 计算结果表明该数学模型在粗网格下也能得到与实验结果比较一致的结果, 从而表明该模型可用于较大区域的水波问题. 该模型具有编程简单、求解比较快速、经济的优点.

**关键词** 水波 数学模型 数值求解

**中图分类号**: O353.2

## 1 引言

在实际海岸工程问题中, 由于设计目的需要了解近岸波况. 外海波浪向内海的传播常常采用数学模型进行模拟. 波浪从外海向近岸海域传播由于受海底地形、海底结构物的影响, 会发生浅化、折射及绕射等波浪变形. 对稍复杂的地形, 尤其在焦散区附近, 由射线理论得到的结果因没有考虑绕射等的影响而与实际相差甚远; Berkhoff<sup>[1]</sup> 导出的椭圆型缓坡方程综合考虑了波浪的浅化和折绕射效应, 但由于方程的椭圆性及离散得到的系数矩阵性质较差, 对稍大的计算域, 采用直接法(如高斯消去法)求解需相当大的计算机内存且计算效率低<sup>[2]</sup>, 传统的迭代法(如高斯-塞得尔法和超松弛法等)用于此方程不能得出收敛解<sup>[2]</sup>, 基于共轭梯度的算法(如双共轭梯度法)虽然可以得到收敛解, 但求解比较复杂(需进行算法的预处理才能得到较快的收敛速度)且仍然不能用于较大区域; 抛物型方程<sup>[3~5]</sup> 虽然可以用于较大区域且计算效率较高, 但该类模型由于不能考虑反射波的影响且要求波浪沿一主要方向传播, 即只适用于波向变化不大的波浪传播问题; Li<sup>[6]</sup> 提出的水波发展方程采用非恒定方程形式来逐步逼近稳态

本文于 2000-01-21 收到, 修改稿于 2000-03-27 收到.

\* 国家自然科学基金重点项目(编号: 59839330, 49910161985); 中国博士后科学基金资助项目(编号: 中博基[1999]10 号).

第一作者简介: 郑永红, 男, 30 岁, 博士, 从事海洋环境水力学方面的研究.

波浪解,其结果精度与椭圆型缓坡方程的精度相当,而其数值求解要简单高效得多,但该模型却难以推广用于大区域波要素计算,因为要想得到该模型高精度的结果,仍然受到每波长至少8个网格点的限制.本文在水波发展方程的基础上,通过消去随空间快速变化的量而导出了适用于大区域波要素计算的数学模型,并用有限差分法对该数学模型进行了数值求解,所得结果与实验结果进行了比较,效果比较满意.

## 2 数学模型

### 2.1 基本方程

Li<sup>[6]</sup>导出的水波发展方程为

$$-2\omega i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla \cdot (CC_g \nabla \Psi) + CC_g k^2 \Psi, \quad (1a)$$

如果考虑底摩擦影响,则上式变为

$$-2\omega i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla \cdot (CC_g \nabla \Psi) + CC_g k^2 \Psi + i\omega F \Psi, \quad (1b)$$

式中,  $\omega$  为波浪圆频率;  $i = \sqrt{-1}$ , 为虚数单位;  $\Psi$  为势函数;  $C$  为波速;  $C_g$  为波群速;  $k$  为分裂因子<sup>[7]</sup>;  $\nabla$  和  $\nabla \cdot$  分别为水平梯度和散度算子;  $F$  为底摩擦因子.  $\omega$  和  $k$  满足色散关系:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh), \quad (2)$$

式中,  $g$  为重力加速度;  $h$  为水深. 根据已知的当地水深及波周期,由上式可预先求出当地分裂因子  $k$ .

根据文献[6],假定  $\Psi$  满足

$$\Psi = A e^{iS}, \quad (3)$$

代入式(1b),并引入  $\nabla S = K_1 \vec{i} + K_2 \vec{j}$  以及  $\partial K_1 / \partial y = \partial K_2 / \partial x$  的关系可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1}{\partial t} + \frac{C_g K_1}{k} \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{C_g K_2}{k} \frac{\partial K_1}{\partial y} - C_g \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{2\omega} \frac{\partial CC_g}{\partial x} (K_1^2 + K_2^2 - k^2) - \\ \frac{1}{2\omega} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( CC_g \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( CC_g \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_2}{\partial t} + \frac{C_g K_1}{k} \frac{\partial K_2}{\partial x} + \frac{C_g K_2}{k} \frac{\partial K_2}{\partial y} - C_g \frac{\partial k}{\partial y} + \frac{1}{2\omega} \frac{\partial CC_g}{\partial y} (K_1^2 + K_2^2 - k^2) - \\ \frac{1}{2\omega} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( CC_g \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( CC_g \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$2\omega \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A^2 CC_g K_1}{\partial x} + \frac{\partial A^2 CC_g K_2}{\partial y} \right) + \omega F A = 0, \quad (6)$$

式中,  $K_1 = \partial S / \partial x$ ,  $K_2 = \partial S / \partial y$ . 式(4)~(6)构成了本文数学模型的基本方程,式(4)用于求解  $x$  方向的波数  $K_1$ , 式(5)用于求解  $y$  方向的波数  $K_2$ , 式(6)用于求解振幅  $A$ . 如果式(6)不考虑底摩擦的作用,则与文献[6]给出的形式是等效的,本文算例中由于无法获得底摩擦因子  $F$  的数据,因此所有算例均未考虑底摩擦的影响.

### 2.2 初始条件

由于本文关心的是稳态下的波要素,因此  $K_1$  和  $K_2$  的初始条件可任意给定,而振幅  $A$  的初始条件给定一正数. 为了快速得出稳态结果,本文给定初始条件为

$$K_1(0, x, y) = k_0 \cos \alpha, \quad K_2(0, x, y) = k_0 \sin \alpha, \quad A(0, x, y) = A_0, \quad (7)$$

式中,  $k_0$  为波浪入射边界处的分裂因子, 在该位置假定  $k_0^2 = K_1^2 + K_2^2$  (这一假定对本文算例是成立的, 事实上在数值计算中, 波浪入射位置总是可以近似采用这一假定);  $\alpha$  为入射波向, 本文考虑的均为正向入射, 因此  $\alpha = 0$ ;  $A_0$  为入射波振幅.

### 2.3 边界条件

对本文算例, 波浪入射边界给定第一类边界条件, 即

$$K_1(t, x_0, y) = k_0 \cos \alpha, \quad K_2(t, x_0, y) = k_0 \sin \alpha, \quad A(t, x_0, y) = A_0, \quad (8)$$

式中,  $x_0$  为波浪入射边界的坐标值. 对侧边界和下游开边界, 本文给定滑移边界条件:

$$\frac{\partial K_1}{\partial n} = \frac{\partial K_2}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial n} = 0, \quad (9)$$

式中,  $n$  为边界外法线方向.

## 3 数值方法

本文采用交错网格系统下的显式有限差分方法对式(4)~(6)进行求解. 交错网格系统定义如图1所示, 其中  $K_1$  定义在  $\rightarrow$  位置,  $K_2$  定义在  $\uparrow$  处, 其他量均定义在  $\circ$  位置处.

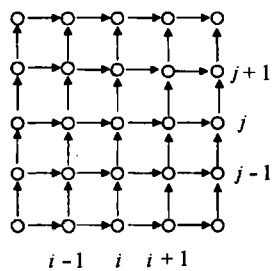


图1 交错网格示意

可以看出式(4)~(6)与浅水方程的形式极为相似, 最大的不同在于式(4)和(5)中出现了三阶导数项. 由于这些三阶导数项的出现, 如果采用隐格式将三个方程全部或部分耦合求解, 则程序实现起来相对较复杂, 本文采用显式有限差分法进行求解. 由于对式(4)~(6)采用显式二阶中心差分格式会不稳定, 因此本文对其中类似于流体动量方程中对流的项采用上风格式, 而其他项的离散采用中心差分, 这种处理虽然使整个计算精度有所降低(相对于中心差分格式而言, 事实上上风格式是一种常用格式, 从本文结果与采用中心差分格式

求解椭圆型缓坡方程得到的结果比较来看, 其精度还是较高的), 但程序实现起来简单, 且计算的稳定性条件只需要满足

$$\frac{\max(|K_1|, |K_2|)\Delta t}{\min(\Delta x, \Delta y)} < \frac{k}{C_g}, \quad (10)$$

式中,  $\Delta x$  和  $\Delta y$  分别为  $x$  方向和  $y$  方向的空间步长;  $\Delta t$  为时间步长. 由式(10)可轻易实现时间步长的自动调整, 从而保证计算的顺利进行. 由于式(4)~(6)的差分式比较冗长, 限于篇幅, 本文将在附录A给出.

## 4 结果及分析

本文将前述数学模型用于两种典型的试验工况, 第一种工况为平底上置一圆形浅滩<sup>[8]</sup>, 研究波浪在该地形上的传播变形; 第二种工况研究的是均匀斜坡上置一椭圆形浅滩对波浪传播的影响<sup>[9]</sup>. 这两组试验常用来验证数学模型的优劣.

### 4.1 圆形浅滩上的波浪折绕射

图2给出的是平底上置一圆形浅滩的平面示意图. 有关计算参数为: 计算域为  $3.2 \text{ m} \times 2.4 \text{ m}$ , 入射波振幅为  $0.0104 \text{ m}$ , 周期为  $0.511 \text{ s}$ , 入射波长为  $0.4 \text{ m}$ , 平底上的水深为  $0.15 \text{ m}$ ,

浅滩区域的水深(m)由下式给出:

$$h = 0.05 + 0.15625[(x - 1.2)^2 + (y - 1.2)^2]. \quad (11)$$

图2中粗黑实线断面表示有实测数据. 整个计算域划分为 $24 \times 16$ 个单元格, 即每个波长含有4个计算点, 数学模型的计算结果与实验结果比较如图3所示(图中纵坐标表示计算或实测振幅与入射波振幅之比), 可以看出, 在粗网格下, 尽管计算结果与实测值有一些差异(主要是未能比较精细地反映出实测振幅中的微小振荡趋势), 但从总体趋势看, 计算结果与实测结果吻合较好, 初步反映了本模型在粗网格条件下也能比较真实地反映客观情况, 从而表明该模型可以用于较大的近岸海域的波浪场计算.

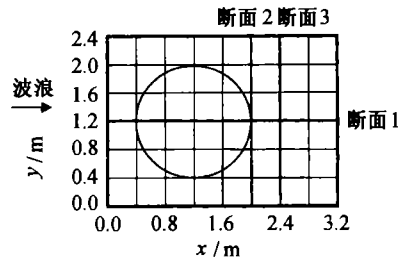


图2 工况1计算域

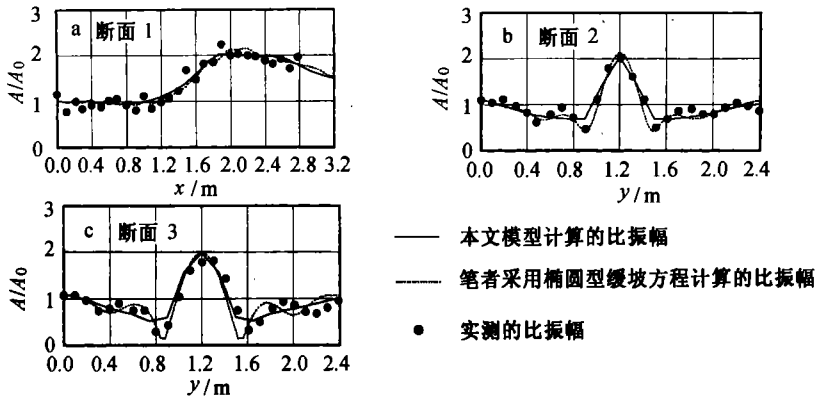


图3 工况1的3个断面计算与实测的比振幅

为了说明本文模型及其求解格式的精度, 本文在每个波长布置16个节点的细网格上采用椭圆型缓坡方程求解了同样问题, 计算得到的结果如图3中的虚线所示, 尽管该结果比本文模型得到的结果更接近实测值, 但其计算机存储量大16倍, 并且如引言所述原因, 该方程的求解比本文模型耗费的计算时间要多得多, 这些是椭圆型缓坡方程难以用于较大区域的原因.

#### 4.2 椭圆形浅滩上的波浪变形

上一节已将本文数学模型用于圆形浅滩上的波浪变形计算, 由于其地形比较简单, 所以计算结果也许不能反映模型的优劣. 为进一步验证数学模型的精度, 本节将模型用于一个有较多实测断面波要素的更复杂的地形. Berkhoff<sup>[9]</sup>针对均匀斜坡上置一椭圆形浅滩的地形进行了波浪物理模型试验, 并取得了8个断面的实测资料. 由于文献[9]中没有详细给出有关试验地形资料及已知的波要素, 本文用到的资料取自文献[4], 其中入射波振幅 $A_0 = 0.0232$  m, 波周期 $T = 1.0$  s, 波浪沿 $x$ 方向传入, 试验水深等值线如图4所示, 计算域为 $21.5 \text{ m} \times 20.0 \text{ m}$ , 斜坡坡度为1:50, 斜坡梯度方向与波浪入射边界的法向夹角为 $20^\circ$ . 斜坡旋转后的坐标 $(x', y')$ 与计算坐标 $(x, y)$ 之间的关系为<sup>[4]</sup>

$$x' = (x - 10.5)\cos 20^\circ - (y - 10)\sin 20^\circ, \quad (12)$$

$$y' = (x - 10.5)\sin 20^\circ + (y - 10)\cos 20^\circ. \quad (13)$$

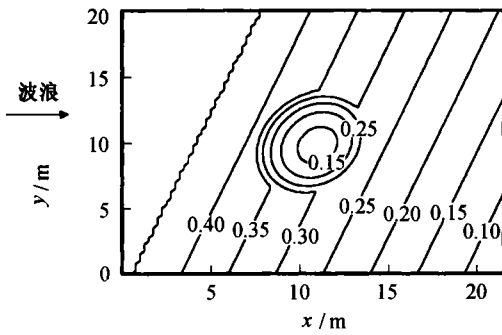


图4 计算区域及水深(m)分布

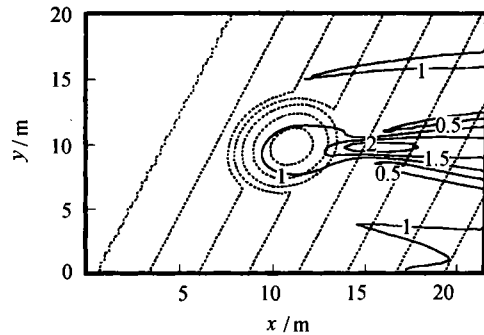


图5 椭圆形浅滩后的计算比振幅(实线)

椭圆形浅滩的中心对应于坐标  $(x', y') = (0, 0)$ , 其边界定义为

$$\left(\frac{x'}{3}\right)^2 + \left(\frac{y'}{4}\right)^2 = 1. \quad (14)$$

平底区及斜坡上的水深(m)定义为

$$h_s = \begin{cases} 0.45 & x' < -5.82, \\ 0.45 - 0.02(5.82 + x') & x' \geq -5.82, \end{cases} \quad (15)$$

而椭圆形浅滩上的水深(m)由下式给出:

$$h = h_s - 0.5 \left[ 1 - \left(\frac{x'}{3.75}\right)^2 - \left(\frac{y'}{5}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + 0.3. \quad (16)$$

由式(15)和(16)可得椭圆形浅滩中心的水深为 0.133 2 m.

在本文计算中,为了使计算点与实测断面位置相重合,将整个计算域划分为  $43 \times 40$  个等间距计算网格,  $x$  和  $y$  方向的空间步长均为 0.5 m (即一个波长内布置 4 个计算点,入射波长为 1.49 m), 8 个断面的计算与实测比振幅(计算或实测振幅与入射振幅之比)如图 6 所示. 从这 8 组数据的对比结果来看,计算结果比较满意.

### 4.3 结果讨论

从前面针对两种地形验证数学模型的效果来看,该数学模型能比较真实地反映客观物理现象,但计算结果与实测值在局部地方差异较大,文献[4]采用线性抛物型缓坡方程得出的结果也与实测值存在较大差异,总体上看,其结果比本文结果稍差. 文献[4]认为计算值与实测值差异较大的原因是未考虑非线性影响,于是通过引入非线性影响使计算结果的精度大为改善. 因此,在本文模型中引入非线性影响是完善该模型的一个重要方面,这是下一步的工作.

## 5 结束语

本文对在水波发展方程基础上导出的数学模型进行了数值求解,并用两种典型的试验工况对数学模型进行了验证. 由计算结果与实验结果比较来看,大致可以得出以下几点认识:(1)本文模型可用于复杂地形上的水波传播问题,其结果在一定程度上是可信的;(2)本文模型由于每个波长仅需布置 4 个计算点并且无需求解庞大的稀疏系数矩阵方程组,因此它可用于

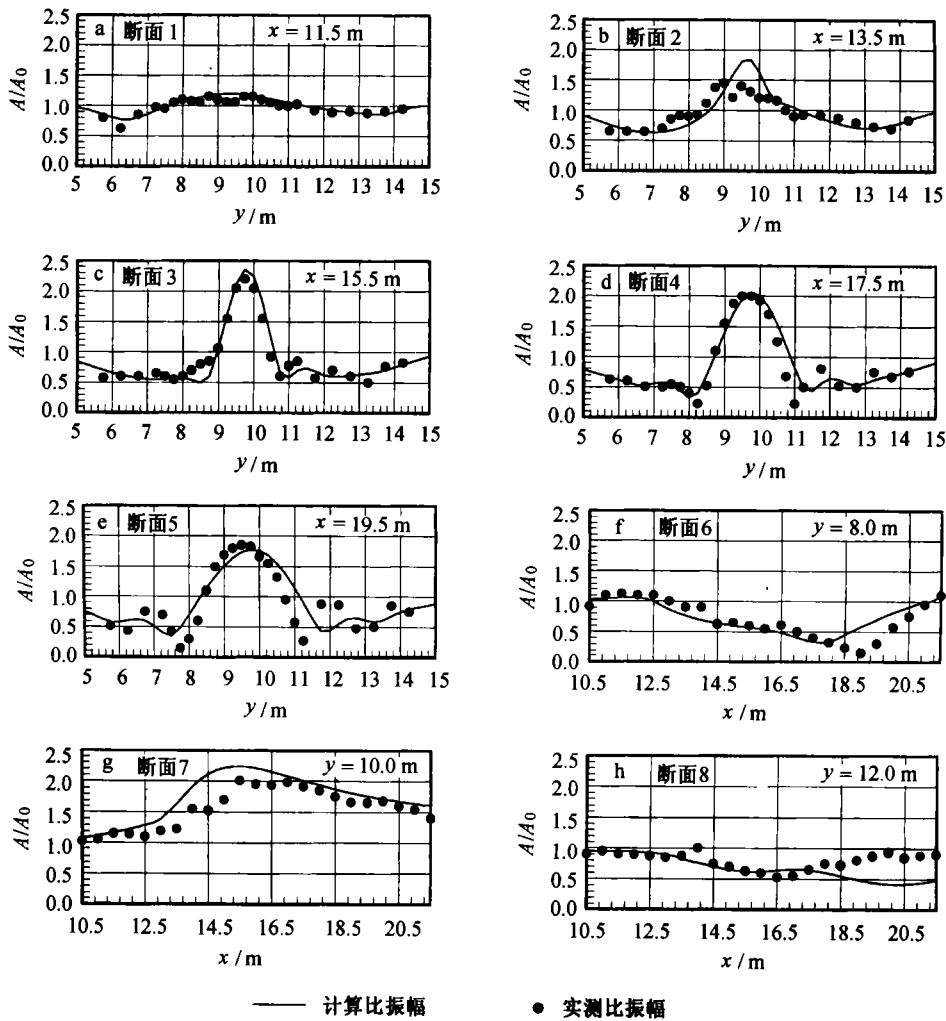


图6 工况2中8个断面的计算和实测比振幅

大区域的水波变形计算;(3)本文算法采用的是显式有限差分格式,时间步长的选取需满足稳定性条件;(4)本文模型尚未计入波浪的非线性影响,这是模型需要完善的地方。

### 参考文献

- 1 Berkhoff J C W. Computation of combined refraction - diffraction. Proc 13th Coastal Eng Conf, Vol.1. Vancouver: ASCE, 1972. 471~490
- 2 Panchang V G, Pearce B R. Solution of the mild-slope wave problem by iteration. Appl Ocean Res, 1991, 13(4): 187~199
- 3 Radder A C. On the parabolic equation method for water - wave propagation. J Fluid Mech, 1979, 95: 159~176
- 4 Kirby J T, Dalrymple R A. Verification of a parabolic equation for propagation of weakly-nonlinear waves. Coastal Engineering, 1984, 8: 219~232
- 5 Dodd N. Efficient higher-order finite-difference schemes for parabolic models. Coastal Engineering, 1996, 28: 57~92
- 6 Li Bin. An evolution equation for water waves. Coastal Engineering, 1994, 23: 227~242
- 7 Battjes J A. Refraction of water waves. J Waterway and Harbor Div, ASCE, 1968, 94: 437~451

- 8 Ito T, Tanimoto K. A method of numerical analysis of wave propagation——application to wave diffraction and refraction. Proc 13th Int Coastal Eng Conf. Vancouver: ASCE, 1972. 503~522
- 9 Berkhoff J C W, Booy N, Radder A C. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. Coastal Engineering, 1982, 6: 255~279

## Numerical solution of a mathematical model for water waves in large coastal areas

Zheng Yonghong,<sup>1</sup> Shen Yongming,<sup>1</sup> Qiu Dahong,<sup>1</sup> Xia Jin<sup>2</sup>

1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023

2. Dalian Design & Research Institute of Environmental Science, Dalian 116023

**Abstract**——Based on the evolution equation for water waves, a mathematical model for wave propagation in large mild-slope areas is derived. The model is solved by the finite difference method with the staggered grid system. The computational results are in good agreement with experimental data and show that better results with relatively coarser grids can also be obtained by the model. The model can be used to simulate water wave propagation in large coastal areas and can be efficiently solved with little programming effort.

**Key words** Water wave, mathematical model, numerical solution

/

## 附录 A 显式差分格式

## 1 式(4)的显式差分格式

式(4)用于求解未知量  $K_1$ , 其离散是在节点  $(i + \frac{1}{2}, j)$  处进行的, 对均匀网格, 其显式差分格式如下:

$$\begin{aligned} & \frac{K_{1i+1/2,j}^{n+1} - K_{1i+1/2,j}^n}{\Delta t} + \left(\frac{C_g}{k}\right)_{i+1/2,j} K_{1i+1/2,j}^n \delta_x K_{1i+1/2,j}^n + \left(\frac{C_g}{k}\right)_{i+1/2,j} K_{2i+1/2,j}^n \delta_y K_{1i+1/2,j}^n - \\ & (C_g)_{i+1/2,j} \frac{k_{i+1,j} - k_{i,j}}{\Delta x} + \frac{1}{2\omega} \frac{(CC_g)_{i+1,j} - (CC_g)_{i,j}}{\Delta x} \left[ (K_{1i+1/2,j}^n)^2 + (K_{2i+1/2,j}^n)^2 - \right. \\ & \left. (k_{i+1/2,j})^2 \right] - \frac{1}{2\omega\Delta x} \left\{ \frac{1}{A_{i+1,j}^n} \left[ (CC_g)_{i+3/2,j} \frac{A_{i+2,j}^n - A_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} - (CC_g)_{i+1/2,j} \frac{A_{i+1,j}^n - A_{i,j}^n}{\Delta x^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. (CC_g)_{i+1,j+1/2} \frac{A_{i+1,j+1}^n - A_{i+1,j}^n}{\Delta y^2} - (CC_g)_{i+1,j-1/2} \frac{A_{i+1,j}^n - A_{i+1,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] - \right. \\ & \left. \frac{1}{A_{i,j}^n} \left[ (CC_g)_{i+1/2,j} \frac{A_{i+1,j}^n - A_{i,j}^n}{\Delta x^2} - (CC_g)_{i-1/2,j} \frac{A_{i,j}^n - A_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. (CC_g)_{i,j+1/2} \frac{A_{i,j+1}^n - A_{i,j}^n}{\Delta y^2} - (CC_g)_{i,j-1/2} \frac{A_{i,j}^n - A_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \right\} = 0, \quad (A1) \end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned} \delta_x K_{1i+1/2,j}^n &= \begin{cases} \frac{K_{1i+1/2,j}^n - K_{1i-1/2,j}^n}{\Delta x} & \text{当 } K_{1i+1/2,j}^n \geq 0, \\ \frac{K_{1i+3/2,j}^n - K_{1i+1/2,j}^n}{\Delta x} & \text{当 } K_{1i+1/2,j}^n < 0, \end{cases} \\ \delta_y K_{1i+1/2,j}^n &= \begin{cases} \frac{K_{1i+1/2,j}^n - K_{1i+1/2,j-1}^n}{\Delta y} & \text{当 } K_{2i+1/2,j}^n \geq 0, \\ \frac{K_{1i+1/2,j+1}^n - K_{1i+1/2,j}^n}{\Delta y} & \text{当 } K_{2i+1/2,j}^n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

由于上面的离散式是在交错网格上进行的, 因此  $C, C_g, k$  及  $K_2^n$  在节点  $(i + \frac{1}{2}, j)$  处均无定义, 可采用下面的插值公式进行计算:

$$\begin{aligned} C_{i+1/2,j} &= 0.5(C_{i+1,j} + C_{i,j}), \quad (C_g)_{i+1/2,j} = 0.5[(C_g)_{i+1,j} + (C_g)_{i,j}], \\ k_{i+1/2,j} &= 0.5(k_{i+1,j} + k_{i,j}), \quad K_{2i+1/2,j}^n = 0.25(K_{2i+1,j}^n + K_{2i+1,j-1}^n + K_{2i,j}^n + K_{2i,j-1}^n). \end{aligned}$$

## 2 式(5)的显式差分格式

式(5)用于求解未知量  $K_2$ , 其离散是在节点  $(i, j + \frac{1}{2})$  处进行的, 对均匀网格, 其显式差分格式如下:



$$\begin{aligned}
& \frac{K_{2i,j+1/2}^{n+1} - K_{2i,j+1/2}^n}{\Delta t} + \left(\frac{C_g}{k}\right)_{i,j+1/2} K_{1i,j+1/2}^n \delta_x K_{2i,j+1/2}^n + \left(\frac{C_g}{k}\right)_{i,j+1/2} K_{2i,j+1/2}^n \delta_y K_{2i,j+1/2}^n - \\
& (C_g)_{i,j+1/2} \frac{k_{i,j+1} - k_{i,j}}{\Delta y} + \frac{1}{2\omega} \frac{(CC_g)_{i,j+1} - (CC_g)_{i,j}}{\Delta y} \left[ (K_{1i,j+1/2}^n)^2 + (K_{2i,j+1/2}^n)^2 - \right. \\
& \left. (k_{i,j+1/2})^2 \right] - \frac{1}{2\omega \Delta y} \left\{ \frac{1}{A_{i,j+1}^n} \left[ (CC_g)_{i+1/2,j+1} \frac{A_{i+1,j+1}^n - A_{i,j+1}^n}{\Delta x^2} - (CC_g)_{i-1/2,j+1} \frac{A_{i,j+1}^n - A_{i-1,j+1}^n}{\Delta x^2} \right] - \right. \\
& \left. \frac{A_{i,j+1}^n - A_{i-1,j+1}^n}{\Delta x^2} + (CC_g)_{i,j+3/2} \frac{A_{i,j+2}^n - A_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} - (CC_g)_{i,j+1/2} \frac{A_{i,j+1}^n - A_{i,j}^n}{\Delta y^2} \right] - \\
& \frac{1}{A_{i,j}^n} \left[ (CC_g)_{i+1/2,j} \frac{A_{i+1,j}^n - A_{i,j}^n}{\Delta x^2} - (CC_g)_{i-1/2,j} \frac{A_{i,j}^n - A_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \right. \\
& \left. (CC_g)_{i,j+1/2} \frac{A_{i,j+1}^n - A_{i,j}^n}{\Delta y^2} - (CC_g)_{i,j-1/2} \frac{A_{i,j}^n - A_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \left. \right\} = 0, \quad (A2)
\end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned}
\delta_x K_{2i,j+1/2}^n &= \begin{cases} \frac{K_{2i,j+1/2}^n - K_{2i-1,j+1/2}^n}{\Delta x} & \text{当 } K_{1i,j+1/2}^n \geq 0, \\ \frac{K_{2i+1,j+1/2}^n - K_{2i,j+1/2}^n}{\Delta x} & \text{当 } K_{1i,j+1/2}^n < 0, \end{cases} \\
\delta_y K_{2i,j+1/2}^n &= \begin{cases} \frac{K_{2i,j+1/2}^n - K_{2i,j-1/2}^n}{\Delta y} & \text{当 } K_{2i,j+1/2}^n \geq 0, \\ \frac{K_{2i,j+3/2}^n - K_{2i,j+1/2}^n}{\Delta y} & \text{当 } K_{2i,j+1/2}^n < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

上式中的  $C, C_g, k$  及  $K_1^n$  在节点  $(i, j + \frac{1}{2})$  处均无定义, 可采用下面的插值公式进行计算:

$$\begin{aligned}
C_{i,j+1/2} &= 0.5(C_{i,j+1} + C_{i,j}), \quad (C_g)_{i,j+1/2} = 0.5[(C_g)_{i,j+1} + (C_g)_{i,j}], \\
k_{i,j+1/2} &= 0.5(k_{i,j+1} + k_{i,j}), \quad K_{1i,j+1/2}^n = 0.25(K_{1i,j+1}^n + K_{1i-1,j+1}^n + K_{1i,j}^n + K_{1i-1,j}^n).
\end{aligned}$$

### 3 式(6)的显式差分格式

式(6)用于求解未知量  $A$ , 其离散是在节点  $(i, j)$  处进行的, 对均匀网格, 其显式差分格式如下:

$$\begin{aligned}
2\omega \frac{A_{i,j}^{n+1} - A_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{A_{i,j}^n} \left[ \frac{(A_{i+1/2,j}^n)^2 (CC_g)_{i+1/2,j} K_{1i+1/2,j} - (A_{i-1/2,j}^n)^2 (CC_g)_{i-1/2,j} K_{1i-1/2,j}}{\Delta x} \right. \\
\left. + \frac{(A_{i,j+1/2}^n)^2 (CC_g)_{i,j+1/2} K_{2i,j+1/2} - (A_{i,j-1/2}^n)^2 (CC_g)_{i,j-1/2} K_{2i,j-1/2}}{\Delta y} \right] = 0. \quad (A3)
\end{aligned}$$

上式中的  $C, C_g$  和  $A$  在节点  $(i, j \pm \frac{1}{2})$  和  $(i \pm \frac{1}{2}, j)$  处均无定义, 可采用前面的有关插值公式进行计算.