

深水风浪的平均波长与平均周期的关系*

吕红民 徐德伦

(青岛海洋大学物理海洋实验室, 青岛 266003)

摘 要 在 Gaussian 波场基础上, 推导出以 P-M 谱和平均 JONSWAP 谱代表的充分成长和有限风区的深水风浪平均波长与平均波周期之间的关系为 $\bar{\lambda} = 0.86 \frac{g}{2\pi} \bar{\tau}^2$. 推导中运用了 Rice 跨零点问题的解并通过滑动时间平均技术估计 4 阶谱矩. 在风浪水槽进行了实验, 实验结果与有限风区下推导出的关系相比较, 符合较好.

关键词 4 阶谱矩 滑动平均技术 Hilbert 变换

1 引言

海浪的平均波长是一个与海洋工程、海洋遥感等许多海洋研究领域有着密切关系的重要环境参数. 由于实际海上波长的测量很困难, 至今在海洋学文献和实际工作中使用的平均波长 $\bar{\lambda}$ 几乎均是由平均周期 $\bar{\tau}$ 换算得到. 常用的换算关系有

$$\bar{\lambda} = \frac{g}{2\pi} \bar{\tau}^2, \quad (1)$$

它在形式上模仿了由线性理论导出的关于个别波的关系式, 显然不够合理. 另一个关系^[1]是由 Neumann 谱导出的

$$\bar{\lambda} = k \left(\frac{g}{2\pi} \right) \bar{\tau}^2, \quad (2)$$

式中 $k = 2/3$. 众所周知, Neumann 谱存在许多缺陷, 且仅适用于充分成长状态的海浪, 现在很少采用. 此外 Ochi^[2]及李玉成和董国海^[3]对于破碎条件下的海浪谱内的破碎大波波长与周期的关系分别得出十分相近的结果, 即分别得系数 $k = 0.75$ 和 $k = 0.74$. 本文给出一种新关系, 并与实验结果作了比较. 在第 2 节中, 将用海浪的谱矩表示 $\bar{\lambda}$ 和 $\bar{\tau}$. 第 3 节中, 介绍一种由 P-M 谱和 JONSWAP 谱估算 4 阶谱矩的方法. 第 4 节将利用前两节结果导出 $\bar{\lambda}$ 和 $\bar{\tau}$ 之间的关系. 第 5 节报告在风浪水槽的实验情况, 并将实验结果与导出的关系进行比较.

本文于 1998-06-01 收到, 修改稿于 1998-10-20 收到.

第一作者简介: 吕红民, 男, 44 岁, 副教授, 现主要从事物理海洋实验研究和教学工作.

2 $\bar{\lambda}$ 和 $\bar{\tau}$ 的基本表达式

假设二维海浪波面高度 $\zeta(x, t)$ 是时间平稳和空间均匀的正态过程. 在这种情况下, 一固定点的波面高度 $\zeta(t)$ 是一个平稳正态过程, 一瞬间的波面高度 $\eta(x)$ 是一个均匀的正态过程. 依 Rice(1944)跨零点问题的解^[4], 平均周期和平均波长分别为

$$\bar{\tau} = 2\pi \left(\frac{m_0}{m_2} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

$$\bar{\lambda} = 2\pi \left(\frac{\mu_0}{\mu_2} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

式中, 谱矩 m_i 和 μ_i 的定义分别为

$$m_i = \int_0^\infty \omega^i S_\zeta(\omega) d\omega, \quad (5)$$

$$\mu_i = \int_0^\infty k^i S_\eta(k) dk, \quad (6)$$

其中 $S(\omega)$ 为 $\zeta(t)$ 的频谱; $S(k)$ 为 $\eta(x)$ 的波数谱. 由频散关系

$$\omega^2 = gk \quad (7)$$

和
$$\int_0^\infty S_\zeta(\omega) d\omega = \int_0^\infty S_\eta(k) dk \quad (8)$$

可得 $\mu_0 = m_0$ 和 $\mu_2 = \frac{m_2}{g}$, 于是由式(4)得

$$\bar{\lambda} = 2\pi g \sqrt{\frac{m_0}{m_2}}, \quad (9)$$

比较式(9)和式(3)有

$$\bar{\lambda} = \frac{(m_0/m_2)^{1/2}}{m_0/m_2} \frac{g}{2\pi} \bar{\tau}^2. \quad (10)$$

3 关于4阶谱矩

由于 Fourier 谱定义的限制性, 任何谱, 无论是理论的还是实测的, 从某个频率开始即变为无效. 具有 Phillips 饱和范围的谱(如 P-M 谱和 JONSWAP 谱)的缺陷也在于其高频尾部不符合海浪实际情况. Glazman^[4]从波面几何统计特征上证明, 此类谱所代表的波面位移具有局部曲率半径趋于零的尖峰, 即波面斜率是均方意义下不连续的. 正是由于这种不连续性使此类谱 4 阶以上的矩不存在[即当 $i \geq 4$ 时式(5)所示的积分发散]. 实际上, 波面不可能存在曲率半径超于零的尖峰, 因为这需要无限大的表面张力的支持. 为了解决这个问题, Glazman 对此类谱代表的波面作时间滑动平均

$$\bar{\zeta}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \zeta(t') dt', \quad (11)$$

其中 T 为平均尺度. 通过这种平均消除波面尖峰, $\bar{\zeta}(t)$ 的谱 $\bar{S}(\omega)$ (称为平滑谱)的 4 阶矩便存在. 式(11)所示的平均, 在频域上等价于将 $\zeta(t)$ 的谱 $S(\omega)$ (称为原谱)乘以一滤波函

数,即

$$\tilde{S}(\omega) = S(\omega) V^2(T\omega), \quad (\text{求 } 0 \sim 3 \text{ 阶谱矩}) \quad (12a)$$

$$\tilde{S}(\omega) = S(\omega) V^4(T\omega), \quad (\text{求 } 4 \text{ 阶谱矩}) \quad (12b)$$

其中,

$$V(T\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}, \quad (13)$$

选定 T 就可由给定的原谱计算出 $\tilde{S}(\omega)$ 的 4 阶矩. Glazman^[5] 选取 Taylor 微尺度

$$T = \left(\frac{m_0}{m_2} \right)^{1/2} = \frac{\bar{\tau}}{2\pi} \quad (14)$$

为平均尺度(即取平均尺度为 $\tilde{\zeta}(t)$ 的平均周期乘以 $1/2\pi$), 计算了平滑 P-M 谱和 JONSWAP 谱的 0~8 阶无因次矩. 表 1 列出其中 4 阶矩以下的谱矩 \tilde{M}_i , 其定义为

$$\tilde{M}_i = \int_0^\infty \Omega^i S(\Omega) V^2(\epsilon\Omega) d\Omega, \quad i \leq 3, \quad (15a)$$

$$\tilde{M}_i = \int_0^\infty \Omega^i S(\Omega) V^4(\epsilon\Omega) d\Omega, \quad i = 4, \quad (15b)$$

式中, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$, ω_0 为谱峰频率; $\epsilon = T\omega_0$ 为无因次 Taylor 微尺度[由式(14)可得, 对 P-M 谱 $\epsilon = 0.710$, 对平均 JONSWAP 谱 $\epsilon = 0.777$]; $S(\Omega)$ 为无因次谱, 对于 P-M 谱,

$$S(\Omega) = \Omega^{-5} \exp(-1.25\Omega^{-4}),$$

对于 JONSWAP 谱,

$$S(\Omega) = \Omega^{-5} \exp(-1.25\Omega^{-4}) \gamma^{\exp(-(\Omega-1)^2/2\delta^2)},$$

其中, $\gamma = 3.3$, $\delta = 0.07(\Omega \leq 1)$, $\delta = 0.09(\Omega > 1)$. \tilde{M}_i 与平滑后的有因次谱矩 $\tilde{m}_i = \int_0^\infty \omega^i \times \tilde{S}(\omega) d\omega$ 的关系为

$$\tilde{m}_i = \alpha g^2 \omega_0^{i-4} \tilde{M}_i. \quad (16)$$

由式(14)和式(15)容易看出, 选择不同的 T 可计算出不同的 \tilde{M}_i . Glazman 指出, 实行如式(11)所示的平均, 不仅在于使定义谱矩的积分收敛, 还要有利于舍弃原谱包含的不适当的高频信息, 使计算出的谱矩与所研究的问题的假设相符合. 由式(14)所示的 Taylor 微尺度是根据 m_0 和 m_1 定义的, 所以是给定谱的内在性质. Glazman 还证明, 这个平均尺度是作为平稳过程的波面位移中最高振动的特征尺度. 本文的基本假定是波场为平稳正态的, 所关心的是波场宏观尺度(不包括微尺度)的振动, 而且我们的兴趣集中于这些宏观尺度振动的跨零点的统计特征(它们受平滑尺度的影响较小), 所以式(14)所示的平均尺度符合我们的基本假定, 有利于我们所关心的问题, 从而是较合理的和适当的. 在下面的推导中我们将使用由这个平均尺度计算的 P-M 谱和 JONSWAP 谱的矩(见表 1).

表 1 平均 JONSWAP 谱和 P-M 谱的无因次谱矩

谱矩阶数 I	0	1	2	3	4
JONSWAP 谱的 \bar{M}_i	0.298	0.352	0.462	0.701	1.195
平均 P-M 谱的 \bar{M}_i	0.196	0.251	0.372	0.685	1.437

4 $\bar{\lambda}$ 和 $\bar{\tau}$ 之间的关系

用表 1 中所列 P-M 谱的 \bar{M}_i , 依式(16)可得 \bar{m}_i , 再将式(10)中的 m_i 代之以 \bar{m}_i , 便得到充分成长状态风浪平均波长与平均周期的关系式

$$\bar{\lambda}_P = 0.85 \frac{g}{2\pi} \bar{\tau}_P^2, \quad (17)$$

其中下标“P”指 P-M 谱.

同样地, 由表 1 所列平均 JONSWAP 谱的 \bar{M}_i , 依式(16)计算 \bar{m}_i , 再由式(10)可得受限风区状态下风浪平均波长与平均周期的关系式

$$\bar{\lambda}_J = 0.87 \frac{g}{2\pi} \bar{\tau}_J^2, \quad (18)$$

其中下标“J”指的是平均 JONSWAP 谱. 取式(17)和(18)的平均, 我们近似以

$$\bar{\lambda} = 0.86 \frac{g}{2\pi} \bar{\tau}^2 \quad (19)$$

作为风浪(包括充分成长和受限风区状态)平均波长与平均周期的关系[即对比式(2), 系数 $k = 0.86$]. 式(17)与由 Neumann 谱得到的关系式(2)差别相当大, 对于同一平均周期由两者计算的平均波长相差 21.5%. 这在应用中是值得注意的.

5 实验

由于在实际海上测量风浪波长非常困难, 至今很少有对我们所研究的问题完全适用的资料. 为了验证式(19)的关系, 我们只能借助实验室实验. 实验在青岛海洋大学物理海洋实验室的大型风浪水槽进行. 该水槽长 48 m, 截面宽 1.5 m, 高 1.4 m. 水槽一端的风机产生风, 水槽的另一端设置有一个 1:10 坡度的消波板, 以消除波浪的反射. 实验中水深保持为 0.75 m. 在水槽前部的平均水面上 0.3 m 的高度处放置一个风速计测量参考风速. 实验中参考风速分别取 8、10、12、14 m/s. 在沿波浪传播方向取 4 个测波点, 各测点对应的风区(测点到出风口的距离)分别为 10、20、30、35 m(见图 1). 每个测点设置一个由 4 根钽丝沿风浪传播波的方向排列的传感器列(见图 2). 钽丝间距 Δx 分别为 6、8 和 10 cm. 这样的钽丝间距所测长度的分辨率与波长尺度基本一致, 因此比较合理. 利用同一时刻钽丝列所测的波面高度 $\zeta_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$ 得到波面的空间信息. 用每对钽丝测得的波面高度的相位差 $\Delta\varphi(\Delta x, t)$ 计算出波长 $\lambda(x, t)$. 为配合上述测量, 我们采用多通道钽丝测波仪采集来自 4 根钽丝的波面高度信号. 该仪器采用特殊的电路, 运用并行采样方式, 通道之间完全同步, 而且信号光电隔离, 具有较强的抗干扰能力和较高的波面测量精度, 特别适合于本实验的要求. 测量部分经接口电路与微型计算机联接, 设定好参数后可自动完成数据采集, 磁盘存储, 实时显示和计算处理. 有关测

量参数和精度指标为:数据采样时间间距为 0.025 s;每通道采样数为15 000个数据;水位测量精度为 1 mm;信号最大不失真频率为 5 Hz.

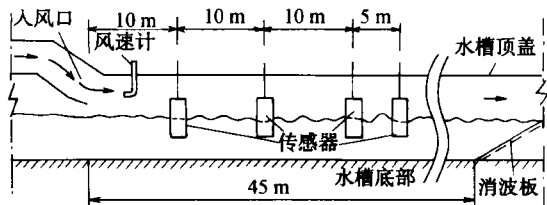


图1 大型风浪风槽中测量波长的传感器设置示意图

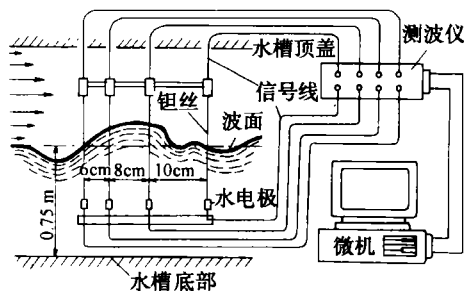


图2 测量波长的钼丝排列及仪器示意图

6 平均波长的计算方法

波浪周期 $\bar{\tau}$ 用波面位移时间序列的上跨零点间的平均时间间隔求平均得到. 平均波长 $\bar{\lambda}$ 则用下述的 Hilbert 变换方法^[7]计算.

实测波面高度 $\zeta(t)$ 与它的 Hilbert 变换 $\hat{\zeta}(t)$ 为卷积关系

$$\hat{\zeta}(t) = \frac{1}{\pi t} * \zeta(t), \tag{20}$$

在窄谱的假定下,如果

$$\zeta(t) = \alpha(t)\cos\varphi(t),$$

则有
$$\hat{\zeta}(t) = \alpha(t)\sin\varphi(t), \tag{21}$$

两者可构成一个复解析函数 $h(t) = \zeta(t) + i\hat{\zeta}(t)$, $\zeta(t)$ 的相位函数为

$$\varphi(t) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\hat{\zeta}(t)}{\zeta(t)}\right) \tag{22}$$

由 Hilbert 变换的有关性质可得

$$F\{h(t)\} = \begin{cases} 2\mathcal{F}\{\zeta(t)\}, & \omega \geq 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \tag{23}$$

其中 \mathcal{F} 表示傅里叶变换运算. 依式(23)用快速傅里叶变换可有效地由 $\zeta(t)$ 计算出 $\hat{\zeta}(t)$, 再由 $\hat{\zeta}(t)$ 和 $\zeta(t)$ 求出 $\varphi(t)$.

由两根间距为 Δx 的钼丝所测的波面位移 $\zeta(x + \Delta x/2, t)$ 和 $\zeta(x - \Delta x/2, t)$ 依式(22)求得相位 $\varphi(x + \Delta x/2, t)$, $\varphi(x - \Delta x/2, t)$, 再计算波数

$$k(x, t) = \frac{\varphi(x + \Delta x/2, t) - \varphi(x - \Delta x/2, t)}{\Delta x} \tag{24}$$

和波长

$$\lambda(x, t) = \frac{2\pi}{k(x, t)}, \tag{25}$$

然后依下式求出各测点处 x 的平均波长 $\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda(x, t_i), \quad (26)$$

其中, $t_i - t_{i-1} = 0.025$ s, $N = 15\ 000$. 为了与上述的微尺度平均相适应并考虑到运用 Hilbert 变换方法的需要, 计算前对实验测得的波面位移信号作了时间长度为 0.25 s 的滑动平均.

7 推导结果与实验结果的比较

推导结果与实验结果如图 3 所示. 图中的黑点为实验室风浪水槽中, 风速 8~14 m/s, 风区为 10~35 m, 钼丝间距分别为 6、8、10 cm 时, 由 35 组波面高度时间序列得到的实测平均波长和平均周期的关系. 水平坐标为波浪周期的平方, 垂直坐标为波长. 图中的 3 条虚线分别为式(1)、(2)和(19)所示的理论关系, 其系数 k 分别为 1、 $\frac{2}{3}$ 、0.86. 可以看出实测数据点几乎都介于式(1)和式(2)所示的理论曲线之间. 用最小二乘法对这些数据点拟合的直线(图中实线)的斜率为

$$\alpha = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\tau}^2} = k \left(\frac{g}{2\pi} \right) = 1.345.$$

由此可得系数 $k = 0.862$, 与导出结果[式(19)]十分相近.

图 3 中实验数据点较离散的可能原因是:(1) 由于使用 Hilbert 变换技术在计算上造成的误差.(2) 风浪水槽风区短, 水深有限, 而实验中风区和风速跨度大, 对于较大的波浪, 风区和水深对波浪的影响突出.(3) 在大风速情况下, 波浪破碎等非线性现象明显.(4) 在较小风速时, 水槽风浪中高频成分较多而会偏离 P-M 谱和 JONSWAP 谱的导出结果.(5) 一些不确定因素影响. 尽管如此, 实验结果的平均趋势特别是斜率仍较稳定.

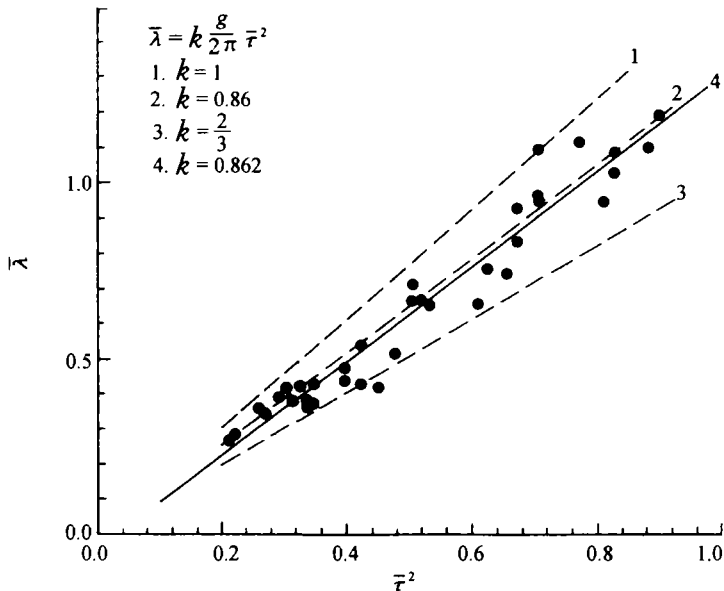


图 3 实验室风浪的 $\bar{\lambda} - \bar{\tau}^2$ 关系与理论关系的比较

值得一提的是,本次实验结果与 Kinsman 由实验室结果所得到的关系式^[1]很一致。

8 结论

在波浪场是正态分布的假设下,推导出新的 $\bar{\lambda}$ 和 $\bar{\tau}$ 之间的关系,对实验室风浪进行了实验测量,并将测量结果与导出关系作了比较,两者符合良好。推导中关键的工作是采用了平滑滤波技术,选择 Taylor 微尺度作为平滑尺度符合我们所关心问题的基本假定。应指出的是,式(19)的推导在很大程度上依赖于线性波理论和 Gaussian 统计学,所以它不能反映风浪的非线性。另外实验室风浪与实际海上的风浪之间有差异^[8,9],因此式(19)所示的关系的有效性如何,最终还需海上实验来验证,实验室结果只能作为探讨该问题的参考。

参考文献

- 1 Kinsman B. Wind Waves. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1965, 40~45
- 2 Ochi M K, Tsai C H. Prediction of occurrence of breaking waves in deep water. J. Physical Oceanograph, 1983, 13, 2 008~2 019
- 3 Li Y C, Dong G H. Wave breaking phenomena of irregular waves combined with opposing current. China Ocean Engineering, 1993, 7(3): 197~206
- 4 Papoulis A P. Probability, Random, Variables, and Stochastic Processes. McGraw-Hill, 1965, 487~492
- 5 Glazman R E. Statistical characterization of sea surface geometry for a wave slope field discontinuous in the mean. J. Geophys. Res., 1986, 91(5): 6 629~6 641
- 6 Glazman R E. Mathematical modeling of breaking wave statistics. In: The Ocean Surface: Wave Breaking, Turbulent Mixing and Radio Probing, Toba Y and Misuyasu H eds. D. Reidel, Hingham, Mass., 1985, 145~150
- 7 Melville W K. Wave modulation and breakdown. J. Fluid Mech., 1983, 128, 489~506
- 8 吕红民,许金山.大型风浪水槽风浪统计特征的测量和分析.青岛海洋大学学报,1996, 26(4): 431~438
- 9 Lü Hongmin, Xu Delun. Spectral characteristics of wind-waves in laboratory. China Ocean Engineering, 1998, 12(2): 183~190

Relationships between mean wavelength and mean wave-period of wind wave in deep water

Lü Hongmin,¹ Xu Delun¹

1. Physical Oceanography Laboratory, Ocean University of Qingdao, Qingdao 266003

Abstract—Relationships between the mean wavelength and mean wave-period of wind waves are derived for fetch-limited and fully developed sea states represented by mean JONSWAP spectrum and P-M spectrum, respectively, and found to be $\bar{\lambda} = 0.86 \frac{g}{2\pi} \bar{\tau}^2$. The derivations start from the Rice solution of zero-crossing problem and the spectral moment of 4-orders involved in the derivations are estimated through a time-averaging technique. Experiments have been conducted in a wind-wave channel. The experimented results are compared with the derived relationship, showing a favorable agreement.

Key words Spectral moment of 4-orders, time-averaging technique, Hilbert transform