第21卷 第4期 海 洋 学 报 Vol. 21, No. 4
1999-07 ACTA OCEANOLOGICA SINICA July, 1999

三阶非线性海浪波面斜率的联合概率统计分布*

张书文 孙孚 管长龙

(青岛海洋大学海洋环境学院，青岛 266003)

摘　要　从 Longuet-Higgins 于 1963 年建立的非线性随机海浪模型出发，对各向同性波面斜率的联合概率统计分布进行了理论研究．结果表明，在三阶近似下，波面斜率联合概率统计分布为截断的 Gram-Charlier 级数，截断的项数取决于非线性近似的阶数，每一阶近似均对前一阶近似结果有所修正．如果不考虑非线性耦合相互作用的影响，则分布蜕化为高斯分布．

关键词　非线性统计分布　波面斜率　耦合矩

1　引言

海浪波面斜率非线性统计分布是深入研究海面和近海面小尺度海-气相互作用过程的重要基础，尤其在海面遥感测量技术和海洋工程中得到广泛应用．海浪波面对光、无线波和声波的反射，或在镜面散射条件下直接依赖于波面斜率统计分布[1~4]，或间接地在大角度入射及 Bragg 衍射散射中通过海浪倾斜的流体效应与波面斜率相联系[5,6]．Barrick[7]曾利用简单的数学推导，给出海面后向散射的物理光学积分与波面斜率统计分布成比例的数学表达式，并在文献［8］中依据几何光学方法，导出由镜面反射形成的雷达后向散射截面与波面斜率统计分布间的直接关系．另外，海浪场内在动力机制，包括波的破碎和波-波间非线性能量输运与波面倾斜程度紧密相关[9~11]．海面粗糙度及海面湍流层的交换特征也与近海空气受波面倾斜的影响有关[12,13]．Longuet-Higgins[14]通过计算累积生成函数（cumulant-generating function），从理论上给出了 Edgeworth 形式的渐近 Gram-Charlier 级数的波面斜率联合概率统计分布．但必须指出的是，Longuet-Higgins 并未考虑近似阶数对 Gram-Charlier 级数项数的截断及其分布参数的影响．此后，Jackson[4]、Srokosz[15]进一步推广了 Longuet-Higgins 的结果，但在物理概念上并未取得进展．在实际应用中只取级数的前几项，舍去高阶项的依据是由于样本的涨落，高阶累积量不可靠．然而，Hung 和 Long[16]的实验结果表明，高阶累积量的分散很小．

本文于 1998-01-20 收到，修改稿于 1998-06-15 收到．

* 国家自然科学基金资助项目（编号：49676274）．

第一作者简介：张书文，男，36 岁，副教授，在读博士，主要从事非线性海浪理论的研究．

本文将工作重点放在：(1) 从 Longuet-Higgins 非线性随机海浪模型出发，利用求耦合矩的方法[17]，在三阶近似下，导出了各向同性的波面斜率的联合概率统计分布为截断的 Gram-Charlier 级数，进而解释了其物理含义．(2) 给出明确的 Gram-Charlier 级数应截断项数的理论依据，并对近似阶数对波-波耦合相互作用的类型及分布参数的影响进行了讨论．

2　非线性随机海浪波面斜率耦合矩的计算

Longuet-Higgins 根据海面上、下剖面的不对称性，将非线性随机海浪的波面高度 ζ 表示为

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \cdots \tag{1}$$

其中，

$$\zeta_1 = a_j\xi_j, \qquad \zeta_2 = a_{jk}\xi_j\xi_k, \qquad \zeta_3 = a_{jkl}\xi_j\xi_k\xi_l \cdots$$

$$\zeta_j = a_j\cos\Omega_j, \qquad \Omega_j = u_jx + v_jy - \omega_jt + \varepsilon_j, \tag{2}$$

此处，$\boldsymbol{r} = (x, y)$ 为位置矢量；$\boldsymbol{k}_j = (u_j, v_j)$、$a_j$、$\Omega_j$、$\omega_j$ 分别为第 j 个波的矢量、振幅、位相、圆周率；u_j、v_j 为 $\boldsymbol{k}_j$ 在 x、y 方向的波分量；ε_j 为第 j 个波均分布于 $[0, 2\pi]$ 上的随机初相位；a_j、a_{jk}、a_{jkl} 为常数．

现考虑式 (1) 对于 x、y 的偏导数 ζ_x、ζ_y，由式 (1) 则有：

$$\zeta_x = \zeta_{1x} + \zeta_{2x} + \zeta_{3x} + \cdots \tag{3}$$

$$\zeta_y = \zeta_{1y} + \zeta_{2y} + \zeta_{3y} + \cdots \tag{4}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_{1x} &= -a_ju_ja_j\sin\Omega_j,\\
\zeta_{2x} &= -a_{jk}u_ja_ja_k\sin\Omega_j\cos\Omega_k - u_{jk}u_ka_ja_k\cos\Omega_j\sin\Omega_k\\
\zeta_{3x} &= -a_{jkl}a_ja_ka_l(u_j\sin\Omega_j\cos\Omega_k\cos\Omega_l + u_k\cos\Omega_j\sin\Omega_k\cos\Omega_l +\\
&\quad u_l\cos\Omega_j\cos\Omega_k\sin\Omega_l)\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_{1y} &= -a_jv_ja_j\sin\Omega_j\\
\zeta_{2y} &= -a_{jk}v_ja_ja_k\sin\Omega_j\cos\Omega_k - a_{jk}v_ka_ja_k\cos\Omega_j\sin\Omega_k\\
\zeta_{3y} &= -a_{jkl}a_ja_ka_l(v_j\sin\Omega_j\cos\Omega_k\cos\Omega_l + v_k\cos\Omega_j\sin\Omega_k\cos\Omega_l +\\
&\quad v_l\cos\Omega_j\cos\Omega_k\sin\Omega_l)\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

为简化耦合矩的计算，现引入复数 $\theta_j = a_j\exp i\Omega_j$，利用其共轭复数 θ_j^*，式(5)与(6)可改写为

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_{1x} &= (1/2)r_j(\theta_j - \theta_j^*)\\
\zeta_{2x} &= (1/2)^2r_{jk}(\theta_j\theta_k - \theta_j^*\theta_k^*) + (1/2)^2r'_{jk}(\theta_j^*\theta_k - \theta_j\theta_k^*)\\
\zeta_{3x} &= (1/2)^3r_{jkl}(\theta_j\theta_k\theta_l - \theta_j^*\theta_k^*\theta_l^* + (1/2)^3r'_{jkl}(\theta_j^*\theta_k\theta_l - \theta_j\theta_k^*\theta_l^*) +\\
&\quad (1/2)^3r''_{jkl}(\theta_j\theta_k^*\theta_l - \theta_j^*\theta_k\theta_l^*) + (1/2)^3r'''_{jkl}(\theta_j\theta_k\theta_l^* - \theta_j^*\theta_k^*\theta_l)\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned} r_j &= \mathrm{i}a_j u_j \\ r_{jk} &= \mathrm{i}a_{jk}(u_j + u_k), \quad r'_{jk} = \mathrm{i}a_{jk}(u_k - u_j) \\ r_{jkl} &= \mathrm{i}a_{jkl}(u_j + u_k + u_l), \quad r'_{jkl} = \mathrm{i}a_{jkl}(u_k + u_l - u_j) \\ r''_{jkl} &= \mathrm{i}a_{jkl}(u_j + u_l - u_k), \quad r'''_{jkl} = \mathrm{i}a_{jkl}(u_j + u_k - u_l) \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

类似地有：

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{1y} &= (1/2)s_j(\theta_j - \theta_j^*) \\ \zeta_{2y} &= (1/2)^2 s_{jk}(\theta_j\theta_k - \theta_j^*\theta_k^*) + (1/2)^2 s'_{jk}(\theta_j^*\theta_k - \theta_j\theta_k^*) \\ \zeta_{3y} &= (1/2)^3 s_{jkl}(\theta_j\theta_k\theta_l - \theta_j^*\theta_k^*\theta_l^*) + (1/2)^3 s'_{jkl}(\theta_j^*\theta_k\theta_l - \theta_j\theta_k^*\theta_l^*) + \\ &\quad (1/2)^3 s''_{jkl}(\theta_j\theta_k^*\theta_l - \theta_j^*\theta_k\theta_l^*) + (1/2)^3 s'''_{jkl}(\theta_j\theta_k\theta_l^* - \theta_j^*\theta_k^*\theta_l) \\ &\quad \cdots\cdots \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned} s_j &= \mathrm{i}a_j v_j \\ s_{jk} &= \mathrm{i}a_{jk}(v_j + v_k), \quad s'_{jk} = \mathrm{i}a_{jk}(v_k - v_j) \\ s_{jkl} &= \mathrm{i}a_{jkl}(v_j + v_k + v_l), \quad s'_{jkl} = \mathrm{i}a_{jkl}(v_k + v_l - v_j) \\ s''_{jkl} &= \mathrm{i}a_{jkl}(v_j + v_l - v_k), \quad s'''_{jkl} = \mathrm{i}a_{jkl}(v_j + v_k - v_l) \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

现设 ζ_{1x}、ζ_{1y} 为一量级为 δ 的小量，则 ζ_{nx}、ζ_{ny} 的量级应为 δ^n．对于 k 近似下的波面斜率，当计算其 n 次方幂时，至少应精确至 δ^{n+k-1} 的量级，在三阶近似下则有：

$$\begin{aligned} \zeta_x^n\zeta_y^m &= \zeta_{1x}^n\zeta_{1y}^m + n\zeta_{1x}^{n-1}\zeta_{2x}\zeta_{1y}^m + n\zeta_{1x}^{n-1}\zeta_{3x}\zeta_{1y}^m + m\zeta_{1x}^n\zeta_{1y}^{m-1}\zeta_{2y} + \\ &\quad m\zeta_{1x}^n\zeta_{1y}^{m-1}\zeta_{3y} + nm\zeta_{1x}^{n-1}\zeta_{2x}\zeta_{1y}^{m-1}\zeta_{2y} + n(n-1)/2\,\zeta_{1x}^{n-2}\zeta_{2x}^2\zeta_{1y}^m + \\ &\quad m(m-1)/2\,\zeta_{1x}^n\zeta_{1y}^{m-2}\zeta_{2y}^2. \end{aligned} \tag{11}$$

注意到时间平均 $\langle\theta_{p_1}\theta_{p_2}\cdots\theta_{p_n}\theta_{q_1}^*\theta_{q_2}^*\cdots\theta_{q_n}^*\rangle$ 取非零值当且仅当下标集 $(p_1\,p_2\cdots p_n)$ 与下标集 $(q_1\,q_2\cdots q_n)$ 全等，依此可以计算出：

$$\begin{aligned} \langle\zeta_x^{2N}\zeta_y^{2M}\rangle &= [(2N)!(2M)!/N!/M!]r^N s^M[1 + a_{20}N/r + a_{02}M/s + a_{22}NM/rs + \\ &\quad a_{40}N(N-1)/r^2 + a_{04}M(M-1)/s^2 + a_{42}N(N-1)M/r^2s + \\ &\quad a_{24}NM(M-1)/rs^2 + a_{60}N(N-1)(N-2)/r^3 + \\ &\quad a_{06}M(M-1)(M-2)/s^3], \end{aligned} \tag{12}$$

$$\langle\zeta_x^{2N}\zeta_y^{2M+1}\rangle = 0, \tag{13}$$

$$\langle\zeta_x^{2N+1}\zeta_y^{2M}\rangle = 0, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \langle\zeta_x^{2N+1}\zeta_y^{2M-1}\rangle &= [(2N+1)!(2M+1)!/N!M!]r^N s^M[a_{11} + a_{31}N/r + a_{13}M/s + \\ &\quad a_{33}NM/rs + a_{51}N(N-1)/r^2 + a_{15}M(M-1)/s^2], \end{aligned} \tag{15}$$

其中，

$$r = \sigma_x^2/2, \quad s = \sigma_y^2/2, \quad \sigma^2{}_x = \sum(a_j u_j)^2 V_j,$$

$$\sigma^2{}_y = \sum(a_j v_j)^2 V_j, \quad V_j = \langle\theta_j\theta_j^*\rangle/2,$$

$$a_{11} = \langle\zeta_{1x}\zeta_{1y}\rangle + \langle\zeta_{2x}\zeta_{2y}\rangle + \langle\zeta_{3x}\zeta_{31}\rangle + \langle\zeta_{1x}\zeta_{3y}\rangle, \tag{16-1}$$

$$a_{20} = \langle \zeta_{1x}\zeta_{3x}\rangle + \langle \zeta_{2x}^2\rangle/2, \qquad a_{02} = \langle \zeta_{1y}\zeta_{3y}\rangle + \zeta_{2y}^2\rangle/2, \tag{16-2}$$

$$a_{22} = \langle \zeta_{1x}\zeta_{2x}\zeta_{1y}\zeta_{2y}\rangle + \langle \zeta_{2x}^2\zeta_{1y}^2\rangle + \langle \zeta_{1x}^2\zeta_{2y}^2\rangle, \tag{16-3}$$

$$a_{31} = \langle \zeta^2{}_{1x}\zeta_{2x}\zeta_{2y}\rangle/2 + 3\langle \zeta_{1x}\zeta_{2x}^2\zeta_{1y}\rangle, \tag{16-4}$$

$$a_{13} = \langle \zeta_{2x}\zeta_{1y}^2\zeta_{2y}\rangle/2 + 3\langle \zeta_{1x}\zeta_{1y}\zeta_{2y}^2\rangle, \tag{16-5}$$

$$a_{33} = 15/2\langle \zeta_{1x}^2\zeta_{2x}\zeta_{1y}^2\zeta_{2y}\rangle + 5/4\langle \zeta_{1x}\zeta_{2x}^2\zeta^3{}_{1y}\rangle + 5/4\langle \zeta_{1x}^3\zeta_{1y}\zeta_{2y}^2\rangle, \tag{16-6}$$

$$a_{42} = 5/2\langle \zeta_{1x}^3\zeta_{2x}\zeta_{1y}\zeta_{2y}\rangle + 15/8\langle \zeta^2{}_{1x}\zeta_{2x}^2\zeta_{1y}^2\rangle + 5/16\langle \zeta_{1x}^4\zeta^2{}_{2y}\rangle, \tag{16-7}$$

$$a_{24} = 5/2\langle \zeta_{1x}\zeta_{2x}\zeta_{1y}^3\zeta_{2y}\rangle + 5/16\langle \zeta_{2x}^2\zeta_{1y}^4\rangle + 15/8\langle \zeta_{1x}^2\zeta_{1y}^2\zeta^2{}_{2y}\rangle, \tag{16-8}$$

$$a_{40} = 6\langle \zeta_{1x}^2\zeta_{2x}^2\rangle, \qquad a_{04} = 6\langle \zeta_{1y}^2\zeta_{2y}^2\rangle, \tag{16-9}$$

$$a_{51} = 5/4\langle \zeta_{1x}^4\zeta_{2x}\zeta_{2y}\rangle + 5/4\langle \zeta^3{}_{1x}\zeta_{2x}^2\zeta_{1y}\rangle, \tag{16-10}$$

$$a_{15} = 5/4\langle \zeta_{2x}\zeta_{1y}^4\zeta_{2y}\rangle + 5/4\langle \zeta_{1x}\zeta_{1y}^3\zeta_{2y}^2\rangle, \tag{16-11}$$

$$a_{60} = 5/16\langle \zeta_{1x}^4\zeta_{2x}^2\rangle, \qquad a_{06} = 5/16\langle \zeta_{1y}^4\zeta_{2y}^2\rangle, \tag{16-12}$$

这里的$\langle\cdot,\cdot,\cdot,\cdot\rangle$表征着波面斜率不同量阶的波 - 波耦合相互作用的量值. 在三阶近似下，耦合矩式(12) 及式(15) 的计算，共涉及到 46 种基本耦合相互作用的类型，但在量值上非零的基本耦合类只有式(16-1) ~ (16-12) 所涉及到的 32 种.

3　波面斜率联合概率统计分布

设 $p(\zeta_x, \zeta_y)$ 为波面斜率 ζ_x、ζ_y 的联合概率密度函数，则其特征函数 $\Phi(\mathrm{i}p, \mathrm{i}q)$ 可表示为

$$\Phi(\mathrm{i}p, \mathrm{i}q) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(\zeta_x, \zeta_y)\exp\mathrm{i}(p\zeta_x + q\zeta_y)\mathrm{d}\zeta_x\mathrm{d}\zeta_y = \sum_{nm}[\langle \zeta^n{}_x\zeta^m{}_y\rangle/n!/m!](\mathrm{i}p)^n(\mathrm{i}q)^m. \tag{17}$$

将式 (12) ~ (15) 代入式 (17)，则有：

$$\Phi(\mathrm{i}p, \mathrm{i}q) = \exp - [(\sigma_x p)^2 + (\sigma_y q)^2]/2 \cdot [1 + \sum_{(n,m)\neq(0,0)}^{6} a_{nm}(\mathrm{i}p)^n(\mathrm{i}q)^m], \tag{18}$$

其中参数 a_{nm} 除 a_{11}、a_{20}、a_{02}、a_{22}、a_{31}、a_{13}、a_{33}、a_{42}、a_{24}、a_{40}、a_{04}、a_{51}、a_{15}、a_{60}、a_{06} 按式(16-1) ~ (16-12) 确定外，其余参数均为零.

分布函数 $p(\zeta_x, \zeta_y)$ 可由其特征函数 $\Phi(\mathrm{i}p, \mathrm{i}q)$ 经 Fourier 逆变换求得：

$$p(\zeta_x, \zeta_y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\mathrm{i}p, \mathrm{i}q)\exp - \mathrm{i}(p\zeta_x + q\zeta_y)\mathrm{d}p\mathrm{d}q = (1/2\pi\sigma_x\sigma_y)\exp - [(\zeta_x/\sigma_x)^2 + (\zeta_y/\sigma_y)^2]/2 \times [1 + \sum_{(n,m)\neq(0,0)}^{6}(\lambda_{nm}/n!m!)H_n(\zeta_x/\sigma_x)H_m(\zeta_y/\sigma_y)], \tag{19}$$

其中，

$$\lambda_{nm} = (n!m!/\sigma_x^n\sigma_y^m)a_{nm}.$$

式 (19) 即为三阶近似下给出的非线性随机海浪波面斜率的联合概率统计分布. 由式 (19) 可以看出，数学上的三阶近似等价于物理上考虑 32 种基本类型的波-波耦合相互作用的累积量. 对于更高阶近似则必需考虑更为复杂更多类型的波-波耦合相互作用. 波面斜率非线性近似的阶数是与所考虑的波-波耦合相互作用的不同类型联系的，并最终确定了 Gram-Charlier 级数应截断的项数. 就三阶近似而言，Gram-Charlier 级数截断于 H_6，而且其分布参数也不

等于 Edgeworth 形式的 Gram-Charlier 级数中的参数．在应用式（19）时，分布中的参数可由式（12）及（15）确定如下：

记 $\mu_{nm} = \langle \zeta_x^n \zeta_y^m \rangle, k_1 = \sigma_x^2,\ k_2 = \sigma_y^2$, 以下列出截断于 H_4 项前 11 个参数的计算结果：

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{11} &= \mu_{11}/(k_1k_2)^{1/2} \\
\lambda_{20} &= (\mu_{20} - k_1)k_1 \\
\lambda_{02} &= \mu_{02} - k_2)/k_2 \\
\lambda_{22} &= (\mu_{22} + k_1k_2/k_2,\ - \mu_{20}k_2 - \mu_{02}k_1)/k_1k_2 \\
\lambda_{31} &= (\mu_{31} - 3\mu_{11}k_1)/\ k_1{}^{3/2}\ K_2{}^{1/2} \\
\lambda_{13} &= (\mu_{13} - 3\mu_{11}k_2)/\ k_1{}^{1/2}\ K_2{}^{3/2} \\
\lambda_{33} &= (\mu_{33} + 9\mu_{11}k_1k_2 - 3\mu_{31}k_2 - 3\mu_{13}k_1)/(k_1k_2)^{3/2} \\
\lambda_{40} &= (\mu_{40} + 3k_1{}^2 - 6\mu_{20}k_1)/\ k_1{}^2 \\
\lambda_{04} &= (\mu_{04} + 3k_2{}^2 - 6\mu_{02}k_2)/\ k_2{}^2 \\
\lambda_{42} &= (\mu_{42} - 6\mu_{22}k_1 + 3\mu_{02}\ k_1{}^2)/\ k_1{}^2k_2 \\
\lambda_{24} &= (\mu_{24} - 6\mu_{22}k_2 + 3\mu_{20}\ k_2{}^2)/k_1\ k_2{}^2
\end{aligned}\right\}. \tag{20}$$

4 二阶近似下的结果

当式（11）保留至二阶近似时，则有：

$$\zeta_x^n\zeta_y^m = \zeta_{1x}^n\zeta_{1y}^m + n\zeta_{1x}^{n-1}\zeta_{2x}\zeta_{1y}^m + m\zeta_{1x}^n\zeta_{1y}^{m-1}\zeta_{2y}, \tag{21}$$

系数 a_{nm} 约化为：$a_{11} = \langle \zeta_{1x}\zeta_{1y} \rangle$，$a_{nm} = 0(n \text{ 或} m \geqslant 2)$．此时分布式（19）改写为高斯项与因子 $[1 + \lambda_{11}H_1(\zeta_x/\sigma_x)H_1(\zeta_y/\sigma_y)]$ 的乘积项．这表明在二阶近似下，波面斜率统计分布的 Gram-Charlier 级数截断于 H_1，而不是通常认为的 H_3．如将式（19）对 ζ_y 在 $(-\infty, \infty)$ 上积分，则可得到关于 ζ_x 的一维统计分布：

$$\begin{aligned}p(\zeta_x) = (1/2\pi\sigma_x)\exp[-(\zeta_x/\sigma_x)^2/2][1 + (\lambda_{20}/2!)H_2(\zeta_x/\sigma_x) + \\ (\lambda_{40}/4!)H_4(\zeta_x/\sigma_x) + (\lambda_{60}/6!)H_6(\zeta_x/\sigma_x)],\end{aligned} \tag{22}$$

完全类似地可以得到对称形式的统计分布 $p(\zeta_y)$：

$$\begin{aligned}p(\zeta_y) = (1/2\pi\sigma_y)\exp[-(\zeta_y/\sigma_y)^2/2][1 + (\lambda_{02}/2!)H_2(\zeta_y/\sigma_y) + \\ (\lambda_{04}/4!)H_4(\zeta_y/\sigma_y) + (\lambda_{06}/6!)H_6(\zeta_y/\sigma_y)],\end{aligned} \tag{23}$$

由式（19）可以看出，由于考虑了非线性耦合相互作用的影响，分布并不服从正态分布，波面斜率 ζ_x、ζ_y 不再是相互独立的随机量，即下列关系式不再成立：

$$p(\zeta_x, \zeta_y) = p(\zeta_x)p(\zeta_y), \tag{24}$$

如果忽略波-波耦合相互作用的非线性影响，则式（19）才蜕化为高斯分布：

$$p(\zeta_x, \zeta_y) = (1/2\pi\sigma_x\sigma_y)\exp - [(\zeta_x/\sigma_x)^2 + (\zeta_y/\sigma_y)^2]. \tag{25}$$

5 结果与讨论

5.1 在非线性随机海浪模型中保留至三阶近似，应用直接求耦合矩的方法，导出波面斜率联合概率统计分布为截断的 Gram-Charlier 级数．

5.2 由于耦合矩 $\langle \zeta_x^{2N} \zeta_y^{2M+1} \rangle = \langle \zeta_x^{2N+1} \zeta_y^{2M} \rangle = 0$，分布函数中的参数仅由耦合矩 $\langle \zeta_x^{2N} \zeta_y^{2M} \rangle$，$\langle \zeta_x^{2N+1} \zeta_y^{2M+1} \rangle$ 及 ${\sigma_x}^2 {\sigma_y}^2$ 确定．波面斜率非线性近似的阶数决定了波-波耦合相互作用的类型，并最终确定了 Gram-Charlier 级数应截断的项数．就本文研究的三阶近似而言，需要考虑 46 种基本类型的波-波耦合相互作用，但对耦合矩有贡献的耦合类只有 32 种，Gram-Charlier 级数截断于 H_6．对于更高阶近似，则需要考虑更为复杂更多类型的波-波耦合相互作用，并且每阶近似都对前一阶近似结果有所修正．如从二阶到三阶，波面斜率分布级数中的所有参数都得到了不同程度的修正．如 a_{11} 的修正项为 3 项，a_{20}、a_{02}、a_{31}、a_{13}、a_{51}、a_{15} 由 0 项变为 2 项修正，a_{22}、a_{33}、a_{42}、a_{24} 则由 0 项变为 3 项修正，a_{40}、a_{04}、a_{60}、a_{06} 由 0 项变为 1 项修正．因此，要提高 Gram-Charlier 级数与实测分布符合程度的有效方法，不是单纯增加项数，而应依据非线性近似的阶数所涉及波-波耦合相互作用的类型订正分布所涉及的参数．随着近似阶数的提高，分布参数需要重新得到修正．

5.3 由于波-波耦相互作用的非线性影响，波面斜率统计分布 $p(\zeta_x, \zeta_y)$ 为非正态的，波面斜率 ζ_x、ζ_y 不再是相互独立的随机量．仅当略去波 - 波耦合相互作用的非线性影响时，分布才蜕化为正态分布．

本文的结果是在波面各向同性的条件下提出的，对各向异性波面结果的推导，我们将另文给出．

参考文献

1 Cox C S, Munk W H. Measurement of the roughness of the sea surface from photographs of the sun's glitter. J. Opt. Soc. Amer., 1954, **44**, 838~850

2 Cox C S, Munk W H. Statistics of the sea surface derived form sun glitter. J. Mar. Res., 1954, **13**, 198~227

3 Barrick D E. Wind dependence of quasi-specular microwave sea scatter. IEEE. Trans. Antennas Propag., AP－22, 1974, 135~136

4 Jackson F C. The reflection of impulses from a nonlinear random sea. J. Geophys. Res., 1979, **84**, 4 939~4 943

5 Plant W J. A two-scale model of short wind generated waves and scatterometry. J. Geophys. Res., 1986, **91**, 10 735~10 749

6 Weissman D. The dependence of the microwave radar cross section on ocean surface variables: comparison of measurements and theory using data from the Frontal Air-Sea Interaction Experiment (PASINEX). J. Geophys. Res., 1990, **95**, 3 387~3 398

7 Barrick D E. A relationship between the slope probability density function and the physical optics integral in rough surface scattering. Proc. IEEE., 1968, **36**, 1 728~1 729

8 Barrick D E. Rough surface scattering based on the specular point theory. IEEE. Trans. Antennas Propag., AP－16, 1968, 449~454

9 Longuet-Higgins M S. On the dynamics of steep gravity waves in deep water. In: Turbulent Fluxes Through the Sea Surface. Wave Dynamics and Wave Prediction, Favre A, Hasselmann K eds, Plenum, New York, 1978, 199~218

10 Phillips O M. Spectral and statistical properties of the equilibrium range in wind-generated gravity waves. J. Fluid Mech., 1985, **156**, 505~531

11 Resio D, Perrie W. A numerical study of nonlinear energy fluxes due to wave-wave interactions. J. Fluid Mech., 1991, **223**, 603~629

12 Wu J. Momentum flux from wind to aqueous flows at various wind velocities and fetches. J. Phys. Oceanogr., 1987, **18**, 140~144

13 Donelan M. Air-sea interaction. In: the Sea. Vol. 9. New York: John Wiley, 1990

14 Longuet－Higgins M S. The effect of nonlinearities on statistical distributions in the theory of sea waves. J. Fluid Mech., 1963, **17** (3): 459~480

15 Srokosz M A. On the joint distribution of surface elevation and slopes for a nonlinear random sea, with an application to radar altime-

try. J. Geophys. Res., 1986, **91** (C1): 995～1 006

16 Hung N E, Long S R. An experimental study of the surface elevation probability distribution and statistics of wind-generated waves. J. Fliud Mech., 1980, **101** (1) : 179～200

17 孙 孚，丁平兴．非线性海浪的波面高度概率分布及其物理解释．中国科学（B辑），1994, **24**(8): 859～865

Joint statistical distribution of surface slopes for the third-order nonlinear random sea waves

Zhang Shuwen,[1] Sun Fu,[1] Guan Changlong[1]

1. *Marine Environmental College, Ocean University of Qingdao, Qingdao* 266003

Abstract —— Based upon Longuet-Higgins's nonlinear model of random sea waves, the joint statistical distribution of isotropic wave surface slopes exact to the third-order is derived. It is shown that the joint distribution of surface slopes has the form of truncated Gram-Charlier series. The truncated terms are decided by the order of approximation to nonlinearity of sea waves. For each order approximation, the coefficients in the series are modified comparatively to the corresponding ones for the previous order approximation. The distribution reduces to Gaussian if the effect of nonlinear wave-wave coupling tnteraction is excluded.

Key words Nonlinear statistical distribution, wave surface slopes, coupling moment