

# 双色入射波下二阶波浪力响应函数\*

滕 斌 李玉成 董国海

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 大连 116023)

**摘 要** 应用边界元方法, 对双频入射波在和频及差频下的二阶速度势做了完整的求解, 通过物面积分计算了任意三维结构上的二阶波浪力的传递函数. 对简单几何物体, 与发表的结果做了对比, 两者吻合良好, 验证了本方法的正确性. 应用这一方法还对复杂的张力腿平台模型做了实际计算, 发现在低频和高频区二阶波浪力平方响应函数有着显著的能量分布.

**关键词** 二阶力 波浪力 响应函数

## 1 引言

张力腿平台是一种半潜顺应式结构, 通过预张应力的钢缆将上部结构联结于海底 (见图 1). 这种结构物水平运动模态 (纵移、横移和转动) 的自振频率远远低于波浪谱具有显著能量分布的频率带, 而纵向运动模态 (升沉、横摇和纵摇) 的自振频率又远远高于其波浪谱的显著能量带, 从而可避免一阶波浪力引起结构的巨大响应, 且结构物的造价不随水深的增加而明显增长. 随着海洋事业向深海的逐步发展, 这种结构会越来越受到人们的青睐. 目前, 世界上已有四座张力腿平台建成并投入使用, 它们是 1984 年建于北海的 Hutton 平台、1990 年建于墨西哥湾的 Joliet 平台、1992 年建于北海的 Snorre 平台和 1994 年建于墨西哥湾 800 m 水深的 Auger 平台.

大风暴中的二阶波浪作用力具有显著的能量分布, 与波浪谱及一阶力谱相比, 二阶波浪力谱分布于更宽的频带之间. 这样低频区的二阶波浪力易于与结构的水平模态的自振频率相吻合, 而高频区的二阶波浪力易于与结构的垂向模态的自振频率相吻合, 从而引起结构的强烈运动响应. 这一现象的出现大大降低了预张钢缆的疲劳寿命, 给结构的安全带来危害. 因此, 正确计算海洋结构上的二阶波浪力的传递函数和结构的运动响应, 对顺应式结构的设计是十分重要的.

对单色入射波下的二阶波浪作用力问题, Molin<sup>[1]</sup>、Eatock Taylor 等<sup>[2]</sup>、缪国平等<sup>[3]</sup>、邹

本文于 1997-07-07 收到, 修改稿于 1997-10-27 收到.

\* 国家自然科学基金资助项目 (编号: 19732004).

第一作者简介: 滕 斌, 男, 41 岁, 教授, 博士, 从事波浪、水流与结构相互作用的研究.

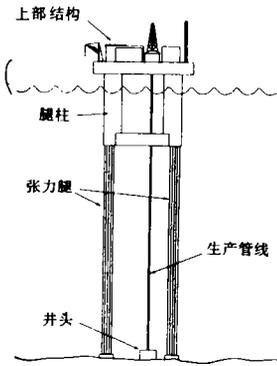


图1 张力腿平台模型

志利等<sup>[4]</sup>分别做了大量的研究. 在单色入射波的作用下, 结构上的二阶力分量只包括定常漂移力和倍频激振力两个分量, 缺少不同频率波浪的共同作用项, 因而这一理论不能用于不规则波浪作用下二阶波浪力谱的研究.

本文以双色波作为入射波, 应用二阶绕射理论和高阶边界元方法, 开发了一个计算二阶波浪力响应函数的计算方法和程序. 应用这一响应函数, 可以模拟不规则波作用下的二阶波浪力谱, 从而进行不规则波浪中结构动力响应的分析. 对简单几何物体, 本文与 Kim 等<sup>[5]</sup>关于轴对称物体的半解析解做了对比, 发现两者比较接近, 验证了本方法的准确性. 本文还应用这一方法对简化的 Snorre 模型做了计算, 其结果可作为深水结构设计的参考.

## 2 基本公式

对波浪与三维结构的相互作用问题, 在有限波高的假设下, 我们对速度势做摄动展开:

$$\Phi(x, t) = \epsilon\Phi^{(1)}(x, t) + \epsilon^2\Phi^{(2)}(x, t) + \dots \quad (1)$$

当入射波浪包含有同方向两个频率 ( $\omega_1$  和  $\omega_2$ ) 的组成波时, 一阶速度势可采用叠加原理写成

$$\Phi^{(1)}(x, t) = \text{Re} \left[ \sum_{j=1}^2 \phi_j^{(1)}(x) e^{-i\omega_j t} \right], \quad (2)$$

相应地二阶势可以表示为这两个频率的和频及差频分量的叠加形式:

$$\Phi^{(2)}(x, t) = \text{Re} \left[ \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \phi_{jl}^-(x, t) e^{-i\omega_{jl}^- t} + \phi_{jl}^+(x, t) e^{-i\omega_{jl}^+ t} \right], \quad (3)$$

式中,  $\omega_{jl}^+ = \omega_j + \omega_l$  和  $\omega_{jl}^- = \omega_j - \omega_l$ , 分别称为和频及差频频率. 这样, 二阶速度势共包括五个频率分量 ( $\omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_1 - \omega_2$ ,  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$  和 0).

在一阶近似下, 速度势、波浪力和结构响应的计算相对来讲非常容易, 目前的困难在于二阶势的求解. 按照通常采用的方法, 将二阶速度势分解为入射势、绕射势和辐射势的形式:

$$\Phi^{(2)}(x, t) = \Phi_i^{(2)}(x, t) + \Phi_d^{(2)}(x, t) + \Phi_r^{(2)}(x, t), \quad (4)$$

并且让辐射势满足下列边界条件:

$$\left. \begin{aligned} -\omega_{jl}^{\pm 2} \phi_{rjl}^{\pm}(x) + g \partial \phi_{rjl}^{\pm}(x) / \partial z &= 0 && \text{在 } z = 0 \\ \partial \phi_{rjl}^{\pm}(x) / \partial n &= -i \omega_{jl}^{\pm 2} n \cdot [\xi_{jl}^{\pm} + a_{jl}^{\pm} \times x] && \text{在物面 } S_b(x, y, z) \\ \partial \phi_{rjl}^{\pm}(x) / \partial z &= 0 && \text{在 } z = -h \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

以及无穷远处的 Sommerfeld 条件. 这样, 二阶绕射势必须满足下列的边界条件:

$$\left. \begin{aligned} -\omega_{jl}^{\pm 2} \phi_{djl}^{\pm}(x) + g \partial \phi_{djl}^{\pm}(x) / \partial z &= Q_{jl}^{\pm}(x) && \text{在 } z = 0 \\ \partial \phi_{djl}^{\pm}(x) / \partial n &= \partial \phi_{ijl}^{\pm}(x) / \partial n + B_{jl}^{\pm}(x) && \text{在 } S_b(x, y, z) \\ \partial \phi_{djl}^{\pm}(x) / \partial z &= 0 && \text{在 } z = -h \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

和波浪向外传播的无穷远条件. 在自由表面, 和频及差频下的强迫项可分别写成

$$Q_{jl}^+ = \frac{1}{2}(q_{jl}^+ + q_{lj}^+), \quad Q_{jl}^- = \frac{1}{2}(q_{jl}^- + q_{lj}^-), \quad (7)$$

式中,

$$q_{j\mu}^+ = \frac{-i\omega_l \phi_l^{(1)}}{2g} \left( -\omega_j^2 \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial z} + g \frac{\partial^2 \phi_j^{(1)}}{\partial z^2} \right) + i\omega_l \nabla \phi_j^{(1)} \cdot \nabla \phi_l^{(1)} + q_{2j\mu}^+,$$

$$q_{j\mu}^- = \frac{i\omega_l \phi_l^{(1)*}}{2g} \left( -\omega_j^2 \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial z} + g \frac{\partial^2 \phi_j^{(1)}}{\partial z^2} \right) - i\omega_l \nabla \phi_j^{(1)} \cdot \nabla \phi_l^{(1)*} + q_{2j\mu}^-,$$

其中  $q_2$  是二阶入射波满足的自由水面条件, 上标 \* 表示复共轭. 物面上的和频及差频下的强迫项可分别写作

$$B_{j\mu}^+ = \frac{1}{2}(b_{j\mu}^+ + b_{j\mu}^+), \quad B_{j\mu}^- = \frac{1}{2}(b_{j\mu}^- + b_{j\mu}^-), \quad (8)$$

式中,

$$b_{j\mu}^+ = \frac{1}{2} \{ n \cdot (-i\omega_l H_{j\mu}^+ x) - n \cdot (\chi_{x_j} \cdot \nabla) \nabla \phi_l^{(1)} + (\alpha_j^{(1)} \times n) \cdot [-i\omega_l \chi_l - \nabla \phi_l^{(1)}] \};$$

$$b_{j\mu}^- = \frac{1}{2} \{ n \cdot (i\omega_l H_{j\mu}^- x) - n \cdot (\chi_{x_j} \cdot \nabla) \nabla \phi_l^{(1)*} + (\alpha_j^{(1)} \times n) \cdot [i\omega_l \chi_l^* - \nabla \phi_l^{(1)*}] \},$$

其中  $\xi$  和  $\alpha$  为物体的平动和转动向量,  $\chi$ 、 $H^+$  和  $H^-$  的定义如下:

$$\chi = \xi^{(1)} + \alpha^{(1)} \times x,$$

$$H_{j\mu}^+ = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha_{y_j}^{(1)} \alpha_{y_l}^{(1)} + \alpha_{z_j}^{(1)} \alpha_{z_l}^{(1)} & 0 & 0 \\ -2\alpha_{x_j}^{(1)} \alpha_{y_l}^{(1)} & \alpha_{x_j}^{(1)} \alpha_{x_l}^{(1)} + \alpha_{z_j}^{(1)} \alpha_{z_l}^{(1)} & 0 \\ -2\alpha_{x_j}^{(1)} \alpha_{z_l}^{(1)} & -2\alpha_{y_j}^{(1)} \alpha_{z_l}^{(1)} & \alpha_{x_j}^{(1)} \alpha_{x_l}^{(1)} + \alpha_{y_j}^{(1)} \alpha_{y_l}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$H_{j\mu}^- = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha_{y_j}^{(1)} \alpha_{y_l}^{(1)*} + \alpha_{z_j}^{(1)} \alpha_{z_l}^{(1)*} & 0 & 0 \\ -2\alpha_{x_j}^{(1)} \alpha_{y_l}^{(1)*} & \alpha_{x_j}^{(1)} \alpha_{x_l}^{(1)*} + \alpha_{z_j}^{(1)} \alpha_{z_l}^{(1)*} & 0 \\ -2\alpha_{x_j}^{(1)} \alpha_{z_l}^{(1)*} & -2\alpha_{y_j}^{(1)} \alpha_{z_l}^{(1)*} & \alpha_{x_j}^{(1)} \alpha_{x_l}^{(1)*} + \alpha_{y_j}^{(1)} \alpha_{y_l}^{(1)*} \end{bmatrix}.$$

### 3 积分方程

经过对速度势的上述分解, 二阶问题的困难仅仅在于二阶绕射势的计算, 辐射势的计算与一阶势的计算是相同的, 只是计算中应分别采用和频及差频下的格林函数. 应用和频及差频下的线性振荡源作为格林函数, 由格林定理可以得到关于二阶绕射势的第二种 Fredholm 积分方程:

$$C(x_0) \phi_{d\mu}^{\pm}(x_0) - \int_{S_b} \frac{\partial G^{\pm}(x, x_0)}{\partial n} \phi_{d\mu}^{\pm}(x) dS = \int_{S_b} G^{\pm}(x, x_0) \left[ \frac{\partial \phi_{d\mu}^{\pm}(x, x_0)}{\partial n} - B_{j\mu}^{\pm}(x) \right] dS + \int_{S_f} G^{\pm}(x, x_0) Q_{j\mu}^{\pm}(x) dS. \quad (10)$$

对自由项  $C$  和物面上双层积分中的奇异核, 采用 Teng 等<sup>[6]</sup>的方法加以消除后可以得到

$$\left( 1 + \int_{S_w} \frac{\partial G_0}{\partial n} dS \right) \phi_{d\mu}^{\pm}(x_0) - \int_{S_b} \left[ \frac{\partial G^{\pm}}{\partial n} \phi_{d\mu}^{\pm}(x) - \frac{\partial G_0}{\partial n} \phi_{d\mu}^{\pm}(x_0) \right] dS = \int_{S_b} G^{\pm} \left[ \frac{\partial \phi_{d\mu}^{\pm}(x, x_0)}{\partial n} - B_{j\mu}^{\pm}(x) \right] dS + \int_{S_f} G^{\pm} Q_{j\mu}^{\pm}(x) dS, \quad (11)$$

式中,  $S_w$  是物体内部的海床面;  $G_0$  是一简单格林函数:

$$G_0 = - \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right], \quad (12)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 r &= [R^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}, & r_1 &= [R^2 + (z + z_0)^2]^{1/2}, \\
 r_2 &= [R^2 + (z - z_0 - 2h)^2]^{1/2}, & r_3 &= [R^2 + (z + z_0 + 2h)^2]^{1/2}, \\
 R &= [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}.
 \end{aligned}$$

物面积分中包含一阶速度势的二阶空间导数, 直接积分很难控制其计算精度. 对一阶势的二阶空间导数项的积分, 我们利用 Stokes 定理<sup>[7]</sup>:

$$\iint_{S_b} G(\chi_j \cdot \nabla) \nabla \phi_i^{(1)} \cdot n dS = \iint_{S_b} \{ (n \cdot \chi_j) [\nabla G \cdot \nabla \phi_i^{(1)}] - (\nabla G \cdot \chi_j) [\nabla \phi_i^{(1)} \cdot n] - G(\alpha_j \times n) \cdot \nabla \phi_i^{(1)} \} dS - \oint_{C_w} G[\nabla \phi_i^{(1)} \cdot \chi_j] \times dl, \quad (13)$$

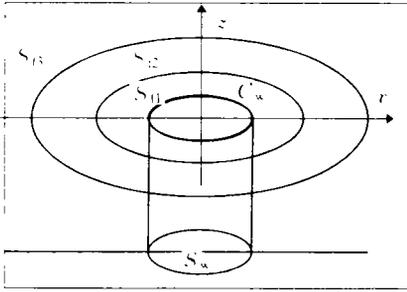


图 2 自由水面上计算域的划分

来消除二阶导数项,  $C_w$  是物体与水面的交线, 称为水线.

自由表面上的强迫项, 随离开物体距离的增加而缓慢地振荡衰减, 简单地截断将产生很大的误差, 本文采用积分到无穷远的方法<sup>[7,8]</sup>加以计算. 为了提高计算效率, 我们将自由水面分成3个区域(图2): 围绕物体的内域  $S_{11}$ 、中间环形区域  $S_{12}$  和外域  $S_{13}$ . 内域上采用直接数值积分方法进行积分, 并应用数学变换:

$$\iint_{S_i} G \phi_j^{(1)} \frac{\partial^2 \phi_{di}^{(1)}}{\partial z^2} dS = \iint_{S_i} \left\{ \phi_j^{(1)} \left[ \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial \phi_{di}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial \phi_{di}^{(1)}}{\partial y} \right] + G \left[ \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{di}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{di}^{(1)}}{\partial y} \right] \right\} dS - \oint_{C_w} G \phi_j^{(1)} \frac{\partial \phi_{di}^{(1)}}{\partial n} dl$$

阶势的二阶空间导数; 在中间区域将格林函数和自由水面上的强迫项展开成傅氏级数的形式:

$$\left. \begin{aligned}
 q^\pm &= \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m q_m^\pm(r) \cos m\theta, & G^\pm &= \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m G_m^\pm(r) \cos m\theta, & m=0, \epsilon_m=1 \\
 & & & & m \neq 0, \epsilon_m=2
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

经过环向解析积分后, 径向采用数值方法计算; 在外部区域的积分中, 忽略散射波的非传播模态, 当参数较大时对 Hankel 函数应用其渐近表达式

$$\left. \begin{aligned}
 H_m(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [P_m(x) + iQ_m(x)] e^{i(x-\gamma_m)} \\
 P_m(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \Gamma(1/2 + m + 2l)}{(2l)! \Gamma(1/2 + m - 2l) (2x)^{2l}} \\
 Q_m(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \Gamma(3/2 + m + 2l)}{(2l+1)! \Gamma(-1/2 + m - 2l) (2x)^{2l+1}} \\
 \gamma_m &= \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4}
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

进行表示后, 自由水面上的积分可以表达成下述不同阶数的多项式积分

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{R_2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha r}}{r^{\rho+1/2}} dr, & p &= 0, 1, 2, \dots \\ I_2 &= \int_{R_2}^{\infty} \frac{e^{i\beta r}}{r^q} dr, & q &= 1, 2, 3, \dots \\ I_3 &= \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{r^s} dr, & s &= 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

的级数形式,  $R_2$  是  $S_{l_2}$  区域的半径, 其大小通过迭代方法确定, 以保证  $S_{l_2}$  和  $S_{l_3}$  上的积分之和趋于收敛.

### 4 二阶波浪力的传递函数

在双频入射波浪作用下, 结构上的二阶作用力可以表达为

$$F^{(2)}(t) = \text{Re} \left[ \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 A_j A_l (f_{jl}^- e^{-i\omega_j^- t} + f_{jl}^+ e^{-i\omega_l^+ t}) \right], \quad (18)$$

式中,  $f_{jl}^{\pm}$  通常被称为和频及差频下的二阶波浪力传递函数 (QTF). 得到二阶和频及差频速度势后, 二阶和频及差频波浪力和波浪力矩可通过物体表面上的压力积分得到. 与倍频问题类似, 对二阶和频及差频下的 QTF 可以写为

$$f_{jl}^{\pm} = f_{pjl}^{\pm} + f_{qjl}^{\pm}, \quad (19)$$

式中,

$$f_{qjl}^{\pm} = \frac{\rho}{2} \iint_{S_b} i\omega_{jl}^{\pm} (\phi_{jl}^{\pm} + \phi_{djl}^{\pm}) ndS \quad (20)$$

是二阶速度势的贡献;

$$\begin{aligned} f_{pjl}^+ &= -\frac{\rho}{4} \iint_{S_b} [\nabla \phi_j^{(1)} \cdot \nabla \phi_l^{(1)} - i\omega_j \nabla \phi_j^{(1)} \cdot \chi_l^{(1)} - i\omega_l \nabla \phi_l^{(1)} \cdot \chi_j^{(1)}] ndS + \\ &\quad \frac{\rho g}{4} \oint_{C_w} \zeta_j^{(1)} \zeta_l^{(1)} N dl + \frac{1}{2} [\alpha_j^{(1)} \times f_l^{(1)} + \alpha_l^{(1)} \times f_j^{(1)}] - \\ &\quad \frac{1}{2} \rho g A_w \{ \alpha_{3j}^{(1)} [x_l \alpha_{1l}^{(1)} + y_l \alpha_{2l}^{(1)}] + \alpha_{3l}^{(1)} [x_l \alpha_{1j}^{(1)} + y_l \alpha_{2j}^{(1)}] \} n_3 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} f_{pjl}^- &= -\frac{\rho}{4} \iint_{S_b} [\nabla \phi_j^{(1)} \cdot \nabla \phi_l^{(1)*} - i\omega_j \nabla \phi_j^{(1)} \cdot \chi_l^{(1)*} + i\omega_l \nabla \phi_l^{(1)*} \cdot \chi_j^{(1)}] ndS + \\ &\quad \frac{\rho g}{4} \oint_{C_w} \zeta_j^{(1)} \zeta_l^{(1)*} N dl + \frac{1}{2} [\alpha_j^{(1)} \times f_l^{(1)*} + \alpha_l^{(1)*} \times f_j^{(1)}] - \\ &\quad \frac{1}{2} \rho g A_w \{ \alpha_{3j}^{(1)} [x_l \alpha_{1l}^{(1)*} + y_l \alpha_{2l}^{(1)*}] + \alpha_{3l}^{(1)*} [x_l \alpha_{1j}^{(1)} + y_l \alpha_{2j}^{(1)}] \} n_3 \end{aligned} \quad (21)$$

是一阶速度势和运动响度平方项的贡献, 其中  $N = n / (1 - n_3^2)^{1/2}$ ;  $A_w$  为水面面积;  $x_l$  和  $y_l$  是水面重心坐标;  $\zeta^{(1)}$  为一阶波面高度;  $f^{(1)}$  为一阶复作用力. 经过上述定义. 并交换脚标后, 和频及差频力满足下列关系:

$$f_{jl}^+ = f_{lj}^+, \quad f_{jl}^- = f_{lj}^{-*}. \quad (22)$$

### 5 数值结果

应用上面所述的理论,编写了计算任意三维结构上 QTF 的通用程序. 积分方程采用二阶四边形和三角形单元加以离散. 为了检验程序的适用性,首先取半径为  $a$  的半球漂浮于  $3a$  水深为例作了数值计算. 半球的质量等于排开水体的质量,在水中只作自由纵移和升沉运动.

表 1 和 2 是和频下计算的 QTF 水平和垂直分量与 Kim 等<sup>[5]</sup>的半解析解的对比,表中  $\nu$

**表 1 和频下自由运动半球上水平 QTF 分量的对比**

		$\nu_2 a$					
		1.2		1.6		2.0	
		本文	Kim 等	本文	Kim 等	本文	Kim 等
$\nu_1 a$	1.2	2.902	2.871	2.394	2.373	2.169	2.151
		1.059	1.031	0.747	0.727	0.660	0.642
		2.370	2.336	2.256	2.233	2.072	2.060
		1.100	1.067	0.903	0.879	0.775	0.761
	1.6	2.394	2.373	2.027	2.010	1.840	1.823
		0.747	0.727	0.472	0.458	0.389	0.368
		2.256	2.233	2.321	2.249	2.139	2.079
		0.903	0.879	0.833	0.778	0.772	0.694
	2.0	2.169	2.151	1.840	1.823	1.681	1.665
		0.660	0.642	0.389	0.368	0.303	0.291
		2.072	2.060	2.139	2.079	2.192	2.178
		0.775	0.761	0.772	0.694	0.844	0.829

注: 球半径为  $a$ , 水深  $h=3a$ . 第一行为一阶项平方的贡献,第二行为物体运动时物面强迫项的贡献,第三行为自由水面上的强迫项、入射势和固定物体上散射势的贡献,第四行为总的波浪力.

**表 2 和频下自由运动半球上垂向 QTF 分量的对比**

		$\nu_2 a$					
		1.2		1.6		2.0	
		本文	Kim 等	本文	Kim 等	本文	Kim 等
$\nu_1 a$	1.2	2.149	2.085	0.793	0.771	0.441	0.431
		3.266	3.219	1.455	1.483	0.912	0.901
		1.213	1.204	1.432	1.109	0.999	0.994
		2.332	2.338	2.087	1.632	1.279	1.278
	1.6	0.793	0.771	0.383	0.378	0.308	0.306
		1.455	1.483	0.645	0.638	0.423	0.419
		1.432	1.109	1.332	1.331	1.465	1.473
		2.087	1.632	1.380	1.383	1.441	1.450
	2.0	0.441	0.431	0.308	0.306	0.284	0.284
		0.912	0.901	0.423	0.419	0.290	0.288
		0.999	0.994	1.465	1.473	1.971	1.977
		1.279	1.278	1.441	1.450	1.912	1.918

注: 见表 1 的注释.

表 3 差频下自由运动半球上水平 QTF 分量的对比

		$\nu_2 a$					
		1.2		1.6		2.0	
		本文	Kim 等	本文	Kim 等	本文	Kim 等
$\nu_1 a$	1.2	0.885	0.878	0.723	0.718	0.658	0.653
		0.000	0.000	0.010	0.010	0.036	0.036
		0.000	0.000	0.060	0.060	0.171	0.160
		0.885	0.878	0.666	0.660	0.498	0.487
	1.6	0.723	0.718	0.655	0.652	0.643	0.639
		0.010	0.010	0.000	0.000	0.008	0.008
		0.060	0.060	0.000	0.000	0.040	0.042
		0.666	0.660	0.655	0.652	0.585	0.581
	2.0	0.658	0.653	0.643	0.639	0.649	0.646
		0.036	0.036	0.008	0.008	0.000	0.000
		0.171	0.160	0.040	0.042	0.000	0.000
		0.498	0.487	0.585	0.581	0.649	0.646

注：第三行为自由水面上的强迫项的贡献，其余同表 1.

表 4 差频下自由运动半球上垂向 QTF 分量的对比

		$\nu_2 a$					
		1.2		1.6		2.0	
		本文	Kim 等	本文	Kim 等	本文	Kim 等
$\nu_1 a$	1.2	0.490	0.494	0.514	0.516	0.475	0.476
		0.000	0.000	0.027	0.027	0.062	0.077
		0.000	0.000	0.042	0.040	0.144	0.126
		0.490	0.494	0.813	0.820	0.789	0.788
	1.6	0.514	0.516	0.425	0.426	0.384	0.386
		0.027	0.029	0.000	0.000	0.012	0.023
		0.042	0.040	0.000	0.000	0.039	0.041
		0.813	0.820	0.425	0.426	0.669	0.676
	2.0	0.475	0.476	0.384	0.386	0.649	0.646
		0.062	0.077	0.012	0.023	0.000	0.000
		0.144	0.126	0.039	0.041	0.000	0.000
		0.789	0.788	0.669	0.676	0.649	0.646

注：见表 3 的注释.

$=\omega^2/g$ . 在计算中  $\frac{1}{4}$  半球上共应用了 100 个单元，自由水面上应用了 200 个单元， $S_{11}$  区的半径为  $5.7a$ . 比较可以看出，除了个别频率组合外，计算结果与 Kim 等<sup>[5]</sup>的结果吻合甚佳. 表 3 和

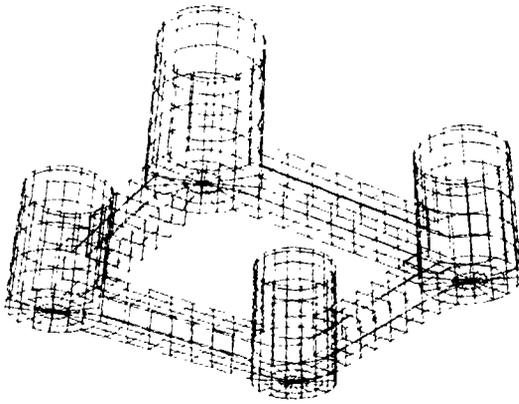


图3 Snorre 平台模型和计算网络

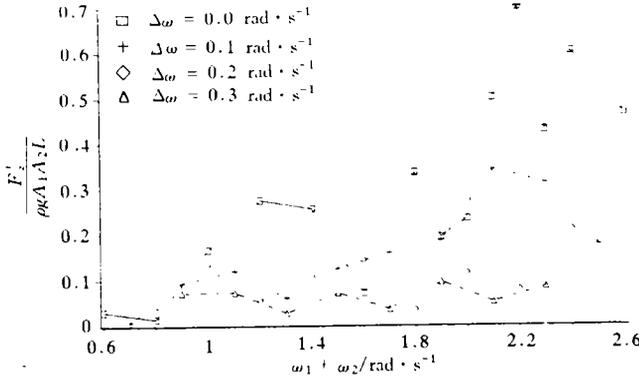


图4 Snorre 平台上二阶和频力传递函数

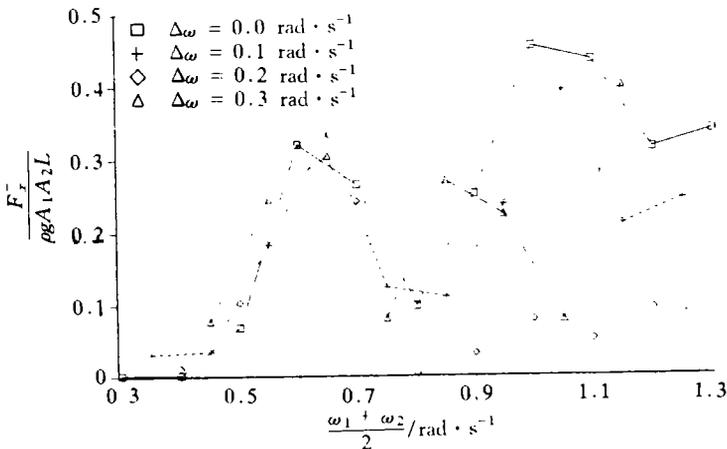


图5 Snorre 平台上二阶差频力传递函数

4是差频下计算的 QTF 水平和垂直分量与 Kim 等<sup>[5]</sup>计算结果的对比,可以看出计算结果与 Kim 等<sup>[5]</sup>的结果基本一致.

应用这一程序还对简化的 Snorre 平台模型做了计算. 平台质心为水上13.5 m, 质量为 $1.0 \times 10^5 \text{t}$ , 转动惯量为  $I_x = I_y = I_z = 2.1 \times 10^8 \text{t} \cdot \text{m}$ , 腿柱半径  $a = 12.5 \text{m}$ , 柱中心距离  $L = 76 \text{m}$ . 计算中物体表面上应用了992个二次单元(图3), 自由水面的近区上应用了608个单元, 区域半径为152 m. 图4是双频入射波作用下, 该平台上和频下的二阶响应函数. 由图4可看出在高频区二阶和频响应函数具有明显的能量分布, 而且频率差别较少的两个入射波较之频率差别较大的情况更容易产生大的波浪作用力. 图5是相应的差频下的二阶响应函数, 从中可以看到在整个低频区上能量的分布都是很明显的, 而且高频入射下更容易产生较强的低频分量.

## 6 结语

6.1 本文以双色波浪作为入射波,应用高阶边界元方法,对双频入射波与任意三维物体相互作用下的二阶速度势做了求解,并利用二阶速度势计算了二阶波浪力传递函数.

6.2 通过对简单几何物体的数值计算及与发表的结果对比,验证了本方法的可用性.通过对比发现,本文结果与 Kim 等<sup>[5]</sup>的结果吻合良好.

6.3 本文还应用该方法对简化的 Snorre 模型做了计算,其结果可作为深水结构设计的参考.由计算结果看,低频和高频区具有显著的能量分布.

## 参考文献

- 1 Molin B. Second-order diffraction loads upon three-dimensional bodies. *Applied Ocean Research*, 1979, **1**, 197~202
- 2 Eatock Taylor R, Huang S M. Second-order wave diffraction by a vertical cylinder in regular waves. *Applied Ocean Research*, 1987, **9**, 19~30
- 3 缪国平, 刘应中. 大直径圆柱上的二阶波浪力. *水动力学研究与进展*, 1987, **98**, 12~24
- 4 邹志利, 戴遗山. 直立圆柱二阶波浪力解析解. *应用数学和力学*, 1994, **15** (9): 807~819
- 5 Kim M H, Yue D K P. The complete second-order diffraction solution for an axisymmetric body——Part I. Bichromatic incident waves and body motions. *J. Fluid Mechanics*, 1990, **211**, 557~593
- 6 Teng B, Eatock Taylor R. New higher-order boundary element methods for wave diffraction/radiation. *Applied Ocean Research*, 1995, **17**(2): 71~77
- 7 滕 斌. 波浪对三维浮体的二阶作用. *水动力学研究与进展*, 1995, **10**(3): 316~317
- 8 Eatock Taylor R, Chau F P. Wave diffraction——some developments in linear and nonlinear theory. *Jour. of Offshore Mech. and Arctic Eng.*, 1992, **114**, 185~194

## Second-order wave force on bodies in bichromatic waves

Teng Bin,<sup>1</sup> Li Yucheng,<sup>1</sup> Dong Guohai<sup>1</sup>

1. *State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023*

**Abstract**——Based on a higher-order boundary element method, a numerical model is established for complex solution of second-order diffraction and radiation potentials at the sum and different frequencies in bichromatic incident waves. The second-order quadrantic transform functions are obtained by the integration of second-order fluid pressure on the body surface. Comparison on bodies with simple geometry shows that the present results are in good agreement with published ones. Computation on a TLIP model shows that the second-order quadrantic transform functions have distinct distribution at lower and higher frequency ranges.

**Key words** Second-order force, wave force, transform function