第20卷 第2期
1998-03

海 洋 学 报
ACTA OCEANOLOGICA SINICA

Vol. 20, No. 2
March, 1998

地球流体中的非线性 Rossby 波*

杨联贵 侯一筠 谢 强 程明华

(中国科学院海洋研究所，青岛 266071)

关键词 Rossby 波 频散关系

1 引言

Rossby 波是由行星涡度随纬度变化引起的一种波动，它是地球流体中大尺度运动的主要波动之一. 目前已有许多文献讨论了线性 Rossby 波[1]. 对于非线性 Rossby 波，也通过多种渐近方法进行了深入研究，并取得了一些令人鼓舞的结果. 在这方面，刘式适等[2]采用非线性项在平衡点展开的办法，通过构造 KdV 方程而得到了有限振幅 Rossby 波的一种近似解析解以及频散关系. 但由于用椭圆函数表示的近似解析解中含有难以确定的积分常数，使得结论不够明确，实用性受到一定限制. 为此，本文从描写非线性 Rossby 波的基本方程出发，采用微分方程几何理论与动力学相结合的办法，通过对相图的定性分析，严格论证了非线性 Rossby 波在行波方向上的周期性，以及系统出现 Rossby 孤立波的条件；采用 K-B 平均法[3]，获得简洁明确的、以刻划非线性效应的小参数为控制参量的有限振幅 Rossby 波的频散关系.

2 基本方程组的定性分析

描写地球流体运动浅水模式的基本方程组为[1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} - fv = -g\dfrac{\partial h}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + fu = -g\dfrac{\partial h}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + v\dfrac{\partial h}{\partial y} + h\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中，u、v 分别为 x、y 方向的速度分量；t 为时间；g 为重力加速度；h 为流体表面高度；f 是 Coriolis 参数.

本文于1996-06-05收到，修改稿于1997-03-12收到.

* 国家自然科学基金资助项目（编号：49476276），山东省重点基金资助项目（编号：950128），中国科学院重点基金资助项目（编号 TZ952—S1—420）.

第一作者简介：杨联贵，男，37岁，博士生，从事非线性海洋波动研究.

设静止流体层厚度为 H（设为常数）则

$$h(x,y,t)=H+\eta(x,y,t). \tag{2}$$

这样式（1）改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}-fv=-g\dfrac{\partial\phi}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+fu=-g\dfrac{\partial\phi}{\partial y},\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial t}+u\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+v\dfrac{\partial\phi}{\partial y}+(c_0^2+\phi)(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y})=0,\end{cases} \tag{3}$$

其中，

$$c_0^2=gH,\ \phi=g\eta,\qquad \phi<c_0^2. \tag{4}$$

在 β 平面内描写非线性 Rossby 波的方程组为[2]

$$\begin{cases}(\dfrac{\partial}{\partial t}+u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y})\zeta+\beta v+fD=0,\\ (\dfrac{\partial}{\partial t}+u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y})\phi+(c_0^2+\phi)D=0,\end{cases} \tag{5}$$

其中，$\zeta\equiv\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$D\equiv\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}$分别是涡度和散度；$\beta$ 为 Rossby 参数（取为常数）.

为了突出式（4）Rossby 波的特性，与线性波相似，采用地转动量近似滤去惯性重力波，则描写非线性 Rossby 波的方程组可以写为[2,4]

$$\begin{cases}(\dfrac{\partial}{\partial t}+u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y})(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2})+\beta\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+f^2(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y})=0,\\ (\dfrac{\partial}{\partial t}+u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y})\phi+(c_0^2+\phi)(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y})=0.\end{cases} \tag{6}$$

令 $u=U(\xi),v=V(\xi),\phi=\Phi(\xi)$

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{k^2+l^2}}(kx+ly-\sigma t)=\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}x+\frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}y-ct, \tag{7}$$

其中，k、l 分别为 x、y 方向的波数，σ 是圆频率，c 是波速.

将式（7）代入式（6），且令 $\dfrac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}U+\dfrac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}V=X$，有

$$\begin{cases}(-c+X)\Phi'''+\beta\dfrac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}\Phi'+f^2X'=0,\\ -c\Phi'+(X\Phi)'+c_0^2X'=0.\end{cases} \tag{8}$$

对式（8）的第2式关于 ξ 积分，且取积分常数为零，有

$$X=\frac{c\Phi}{c_0^2+\Phi}. \tag{9}$$

对式（9）两端关于 ξ 求导

$$X'=\frac{cc_0^2\Phi'}{(c_0^2+\Phi)^2}. \tag{10}$$

将式（10）代入式（8）第1式，得

$$(-c+\frac{c\Phi}{c_0^2+\Phi})\Phi'''+\frac{\beta k}{\sqrt{k^2+l^2}}\Phi'+\frac{f^2cc_0^2\Phi'}{(c_0^2+\Phi)^2}=0, \tag{11}$$

即

$$\Phi''' = \frac{\beta(1+\frac{\Phi}{c_0^2})^2 + c_x\mu^2}{c_x(1+\frac{\Phi}{c_0^2})}\Phi'. \tag{12}$$

其中，$\mu=\frac{f}{c_0}$是 Rossby 变形半径的倒数；$c_x=\frac{\sigma}{k}$是 x 方向的波速.

对式（12）关于 ξ 求积分，且取积分常数为零，得

$$\Phi'' = \frac{\beta}{c_x}\Phi + \frac{\beta}{2c_0^2c_x}\Phi^2 + c_0^2\mu^2\ln(1+\frac{\Phi}{c_0^2}). \tag{13}$$

令 $\Phi'=I$，则式（13）变成下列平面自治系统

$$\begin{cases} \Phi' = I \equiv F(\Phi,I), \\ I' = \frac{\beta}{c_x}\Phi + \frac{\beta}{2c_0^2c_x}\Phi^2 + c_0^2\mu^2\ln(1+\frac{\Phi}{c_0^2}) \equiv G(\Phi,I). \end{cases} \tag{14}$$

经简要分析，式（14）有两个平衡点：（0，0）和（$-a$，0），其中

$$0 < c_0^2(1-\sqrt{-\frac{c_x\mu^2}{\beta}}) < a < c_0^2. \tag{15}$$

系统（14）在平衡点（0，0）处的导算子矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \Phi} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial \Phi} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\beta}{c_x}+\mu^2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

其特征值为纯虚数，且

$$F(\Phi,I) = -F(\Phi,-I),\quad G(\Phi,I)=G(\Phi,-I),$$

所以（0，0）是系统（14）的中心型平衡点[5]，故系统（14）在（0，0）附近的相图为绕坐标原点的闭轨簇，说明非线性 Rossby 波解在原点附近具有周期性.

在平衡点（$-a$，0）的导算子矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \Phi} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial \Phi} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix}_{(-a,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\beta}{c_x} - \frac{\beta}{c_0^2c_x}a + \frac{c_0^2\mu^2}{c_0^2-a} & 0 \end{bmatrix}.$$

其特征值为一对实的相反数，故（$-a$，0）是系统（14）的鞍点，并存在过鞍点的同宿轨道，对应于系统（14）的孤立波解. 因为此时，$\left|\frac{\Phi}{c_0^2}\right|$不再是小量［参见式（15）］. 所以参考文献［2］中，把系统（14）在平衡点（0，0）附近作 Taylor 展开而构造出的 KdV 方程导出的孤立波解不够准确.

3　有限振幅 Rossby 波的频散关系

将式（14）第2式在平衡点（0，0）作 Taylor 展开，则式（14）变为

$$\begin{cases} \Phi' = I, \\ I' = (\frac{\beta}{c_x}+\mu^2)\Phi + (\frac{\beta}{2c_0c_x} - \frac{\mu^2}{2c_0^2})\Phi^2 + \frac{\mu^2}{3c_0^4}\Phi^3 + \cdots. \end{cases} \tag{17}$$

若在式（17）中只保留一次项：

$$\begin{cases}\Phi' = I, \\ I' = \left(\dfrac{\beta}{c_x} + \mu^2\right)\Phi.\end{cases} \tag{18}$$

即是传统的线性近似，其频散关系为

$$c_x = -\frac{\beta}{k^2 + l^2 + \mu^2}, \tag{19}$$

轨线为

$$\frac{I^2}{-\dfrac{\beta}{c_x} - \mu^2} + \Phi^2 = \Phi_0^2,$$

其解为

$$\begin{cases}\Phi = \Phi_0 \cos\sqrt{k^2 + l^2}\xi, \\ I = -\sqrt{-\dfrac{\beta}{c_x} - \mu^2}\ \Phi_0 \sin\sqrt{k^2 + l^2}\xi.\end{cases} \tag{20}$$

若在式（17）中保留至三次项

$$\begin{cases}\Phi' = I, \\ I' = \left(\dfrac{\beta}{c_x} + \mu^2\right)\Phi + \left(\dfrac{\beta}{2c_0 c_x} - \dfrac{\mu^2}{2c_0^2}\right)\Phi^2 + \dfrac{\mu^2}{3c_0^4}\Phi^3.\end{cases} \tag{21}$$

它描写了一种有限振幅 Rossby 波.

我们将用 K-B 平均法求有限振幅 Rossby 波的频散关系，基于式（20），令

$$\begin{cases}\Phi = \Phi_0(\xi)\cos\theta(\zeta), \\ I = -\sqrt{-\dfrac{\beta}{c_x} - \mu^2}\Phi_0(\zeta)\sin\theta(\zeta),\end{cases} \tag{22}$$

其中 $\Phi_0(\zeta)$是 ζ 的缓变函数.

把对式（22）求导所得，连同式（22）代入式（21）得

$$\begin{cases}\Phi'_0\cos\theta - \theta'\Phi_0\sin\theta = -\sqrt{-\dfrac{\beta}{c_x} - \mu^2}\Phi_0\sin\theta, \\ -\sqrt{-\dfrac{\beta}{c_x} - \mu^2}\Phi'_0\sin\theta - \theta'\sqrt{-\dfrac{\beta}{c_x} - \mu^2}\Phi_0\cos\theta \\ = \left(\dfrac{\beta}{c_x} + \mu^2\right)\Phi_0\cos\theta + \left(\dfrac{\beta}{2c_0^2 c_x} - \dfrac{\mu^2}{2c_0^2}\right)\cos^2\theta + \dfrac{\mu^2}{3c_0^4}\Phi_0^3\cos^3\theta.\end{cases} \tag{23}$$

因此有

$$
\left\{
\begin{aligned}
\Phi'_0 = & -\sqrt{-\frac{\beta}{c_x}-\mu^2}\Phi_0\sin\theta\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{-\frac{\beta}{c_x}-\mu^2}}\Big[\Big(\frac{\beta}{c_x}+\mu^2\Big)\Phi_0\cos\theta \\
& +\Big(\frac{\beta}{2c_0^2c_x}-\frac{\mu^2}{2c_0^2}\Big)\cos^2\theta+\frac{\mu^2}{3c_0^4}\Phi_0^3\cos^3\theta\Big], \\
\theta' = & \frac{1}{\Phi_0}\Big\{-\frac{\cos\theta}{\sqrt{-\frac{\beta}{c_x}-\mu^2}}\Big[\Big(\frac{\beta}{c_x}+\mu^2\Big)\Phi_0\cos\theta \\
& +\Big(\frac{\beta}{2c_0^2c_x}-\frac{\mu^2}{2c_0^2}\Big)\Phi_0\cos^2\theta+\frac{\mu^2}{3c_0^4}\Phi_0^3\cos^3\theta\Big]+\sqrt{-\frac{\beta}{c_x}-\mu^2}\Phi_0\sin^2\theta\Big\}.
\end{aligned}
\right. \tag{24}
$$

由 K-B 平均法，对式（24）右端在1个周期内求平均

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\Phi'_0 = 0, \\
&\theta' = \sqrt{-\frac{\beta}{c_x}-\mu^2}-\frac{\mu^2\Phi_0^2}{8c_0^4\sqrt{-\frac{\beta}{c_x}-\mu^2}},
\end{aligned}
\right. \tag{25}
$$

故有

$$
k^2+l^2=\Big(-\frac{\beta}{c_x}-\mu^2\Big)\left[1-\frac{1}{8}\frac{\mu^2\Phi_0^2}{c_0^4\Big(\frac{\beta}{c_x}-\mu^2\Big)}\right]^2,
$$

即

$$
\frac{k^2+l^2}{-\frac{\beta}{c_x}-\mu^2}=\left[1-\frac{1}{8}\Big(\frac{\mu}{\sqrt{k^2+l^2}}\frac{\Phi_0}{c_0^2}\Big)\frac{k^2+l^2}{-\frac{\beta}{c_x}-\mu^2}\right]^2.
$$

令 $\varepsilon=\frac{\mu}{\sqrt{k^2+l^2}}\frac{\Phi_0}{c_0^2}$，为小量，ε 中既含有旋转效应（$\frac{\mu}{\sqrt{k^2+l^2}}$），又含有非线性效应（$\frac{\Phi_0}{c_0^2}$），这样上式变为

$$
\frac{k^2+l^2}{-\frac{\beta}{c_x}-\mu^2}=\left[1-\frac{1}{8}\frac{k^2+l^2}{-\frac{\beta}{c_x}-\mu^2}\varepsilon^2\right]^2. \tag{26}
$$

若在式（26）只保留 ε^2项，有

$$
\frac{k^2+l^2}{-\frac{\beta}{c_x}-\mu^2}=1-\frac{1}{4}\varepsilon^2, \tag{27}
$$

即有

$$
\sigma=-\frac{\beta k}{k^2+l^2+\mu^2}\Big(1-\frac{1}{4}\varepsilon^2\Big). \tag{28}
$$

显然，当 $\varepsilon\ll1$，式（28）变为线性情形的频散关系式（19）.

4 结论

将微分方程的几何理论用于不易求解的非线性 Rossby 波的研究中，为掌握该波动的整体性质提供了一个有效的途径，而 K-B 平均法对于研究周期性现象非常有效. 两者结合起来，是求有限振幅 Rossby 波的频散关系的重要手段.

本文的方法可以用来研究其他类非线性波动的定性问题和有限振幅波动的频散关系.

参考文献

1 Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974, 697
2 刘式适等. 地球流体中的非线性波动. 中国科学, 1983, (3): 279～289
3 谢定裕. 渐近方法在流体力学中的应用, 北京: 友谊出版公司, 1983, 12～13
4 王玉清. 非线性正压 Rossby 波的精确解. 气象学报, 1991 (4): 411～420
5 侯一筠. 旋转流体中的非线性惯性波. 海洋学报, 1995 (1): 6～12
6 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分叉, 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989, 97～110
7 李继彬. 浑沌与 Melnikov 方法, 重庆: 重庆大学出版社, 1989, 64～70

Nonlinear Rossby wave in geophysical fluid

Yang Liangui,[1] Hou Yijun,[1] Xie Qiang,[1] Cheng Minghua[1]

1. *Institute of Oceanology, Academy of Sciences of China, Qingdao* 266071

Key words Rossby wave, dispersive relationship