

# 二维表面波破碎面分形结构\*

田纪伟 曹露洁 楼顺里

(青岛海洋大学物理海洋实验室)

**摘要** 本文利用非线性理论,在各组成波空间特征尺度可分离情况下,推广了 Longuet-Higgins (1994) 最新结果.并在某些可允许条件范围内,利用  $n$  次骑波能量方程,给出了  $n-1$  次骑波关于  $n$  次骑波扰动失稳条件.由失稳条件及破碎波动力机制,分析了二维表面波破碎面的拓扑结构,并给出了计算该破碎面分形维数表达式.最后,通过一具体实例,来进一步解释破碎面分形拓扑结构.

**关键词** 破碎波面 自相似结构 分形维数 失稳条件

## 前言

随着人们逐渐意识到波的破碎过程对海气交换、海气微尺度相互作用以及全球气候变化影响和重要作用,自 80 年代以来,对破碎波的研究已成为许多国际间海洋研究科学活动的重要内容,以致于近 20 年来破碎波的研究成为大家关注的热点课题之一.毋庸讳言,波的破碎过程是一个非常复杂的非线性过程,近几年来人们已开始利用非线性科学思想——分形几何学、重正化群方法、耦合映射等新的思想方法来对波的破碎过程进行探讨. Huang<sup>[1]</sup>验证了海浪记录资料隐含着分形特性, Kerman<sup>[2]</sup>借助于多重分形理论对海面图像资料进行了研究.但在他们的研究工作中,与分形相关的动力学机制未做讨论.最近, Longuet-Higgins<sup>[3]</sup>,在某些条件假设下,借助于分形几何自相似概念,建立了波峰附近或波谷附近破碎波分形模型.依据此分形模型的研究,证实了波峰破碎点附近向下加速度的上限为重力加速度  $g$ ,波谷破碎点附近向上的加速度可达到无穷.同时利用高次骑波能量方程,给出了稳定性条件,并解释了由于辐射应力的存在,导致低次骑波波前收缩,最终使低次骑波波前关于高次骑波失稳的情况.相反,低次骑波波后将关于高次骑波是稳定的.这恰恰也就是一般海浪观测中为什么波前粗糙,而波后光滑的几何性质的动力学原因.显然, Longuet-Higgins 模型仅仅从局部上利用波峰和波谷破碎点临近的自相似结构及高次骑波失稳性质解释了波峰和波谷破碎点几何性质及动力学机制,并没有从整体上来解释破碎波面的拓扑结构及动力学特征.本文从较完全的  $n$  次骑波能量方程出发,利用双曲型方程特征量论,确定了  $n-1$  次骑波关于  $n$  次骑波扰

本文于 1995-02-28 收到,修改稿于 1995-09-23 收到.

\* 国家自然科学基金资助项目(编号:49376254).

动沿特征线失稳的条件. 推广和发展了 Longuet-Higgins 破碎波分形模型, 解释了一般具有自相似几何结构 (这往往体现动力系统内涵着某种自组织现象) 和具有可分离空间特征尺度骑波的破碎波面的拓扑结构, 并给出计算破碎波面自相似维数的解析表达式. 最后, 通过一个简单实例, 进一步阐明破碎波面的拓扑结构.

## 1 稳定性分析及波面自相似结构

首先, 讨论最简单情况 (如图 1) 波峰附近出现骑波现象, 此时波高  $\eta$  的解析表达式<sup>[3]</sup>为

$$\eta = f(x) + \rho f(x/\rho) + \rho^2 f(x/\rho^2) + \dots, \quad (1)$$

式中,  $\rho$  为自相似标度,  $f(x)$  为零次骑波. 利用表达式 (1) 可确定破碎点 (原点) 处曲率趋于无穷, 即为数学上尖点. 并在相对坐标系下依次使用 Longuet-Higgins 和 Fox<sup>[4]</sup> 有关破碎波动力学判据, 可得到在波峰或波谷处破碎波向下的加速度或向上的加速度.

下面我们讨论任意  $n$  次骑波的失稳问题, 如图 2 所示.

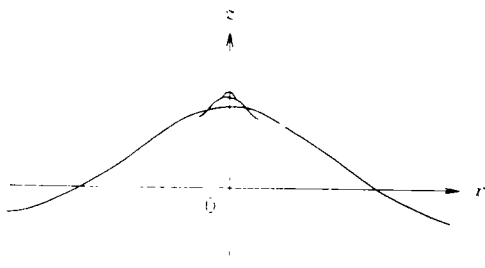


图 1

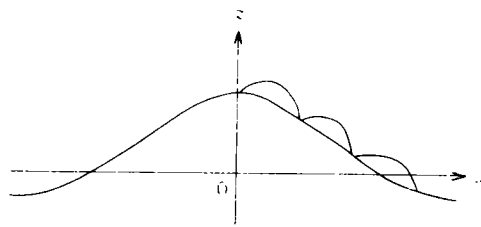


图 2

$n$  次骑波的能量方程为<sup>[5]</sup>

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_a} [E(U_a^{n-1} + (C_k^n)_a)] + S_{a\beta} \frac{\partial U_\beta^{n-1}}{\partial x_a} = 0, \quad (2)$$

式中,  $S_{a\beta}$  为辐射应力张量,  $E$  为  $n$  次骑波波动能量,  $C_k^n$  为  $n$  次骑波群速度,  $U_\beta^{n-1}$  为  $n-1$  次骑波质点速度,  $(x_1, x_2) = (x, z)$ .

若记  $L^{n-1}$  和  $L^n$  分别表示  $n-1$  次骑波和  $n$  次骑波的空间特征尺度, 则在  $L^{n-1} \gg L^n$  条件下, 方程 (2) 可写为

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (U^{n-1} + C_k^n) \frac{\partial E}{\partial x} = -S_{xx} \frac{\partial U^{n-1}}{\partial x}, \quad (3)$$

在深水重力波情况下  $S_{xx} = E/2$ , 方程 (3) 为非齐次双曲型方程, 其特征线微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= C_k^n + U^{n-1}, \\ x|_{t=0} &= x_0, \end{aligned} \quad (4)$$

过点  $(0, x_0)$  的特征线为

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t [C_k^n + U^{n-1}]|_{x=x(\tau)} d\tau, \quad (5)$$

沿特征线, 方程 (3) 可写为

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x} E, \quad (6)$$

记

$$F(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial U^{n-1}}{\partial x} d\tau, \quad (7)$$

则方程(6)可化为

$$\frac{de^F E}{dt} = 0, \quad (8)$$

即

$$E[t, x(t, x_0)] = E(0, x_0) e^{-1/2 \int_0^t \frac{\partial U^{n-1}}{\partial x} d\tau}. \quad (9)$$

由  $n$  次骑波能量表达式(9)可知, 若  $n-1$  骑波质点速度  $U^{n-1}$  沿特征线梯度小于零, 即沿特征线,  $n-1$  次骑波波面收缩, 将导致  $n$  次骑波振幅增加(能量增加), 最终引起  $n$  次骑波失隐. 在行进波或驻波的情况下, 这是造成波前粗糙易于破碎、波后光滑不易于破碎的动力学主要机制. 这些性质恰恰与通常的观测结果相吻合. 以上稳定性分析的数学描述为

若记

$$\Omega^{n-1} = \left\{ x \mid \frac{\partial U^{n-1}}{\partial x} \leq 0 \right\},$$

即在集合  $\Omega^{n-1}$  中的点,  $n-1$  次骑波关于  $n$  次骑波的扰动是不稳定的.

有了以上的  $n$  次骑波稳定性分析结果, 下面我们将利用此结果, 对破碎波面的几何拓扑结构进行研究. 我们在此假设零次骑波(即: 可识别波形具有最大的特征尺度  $L$ ) 为  $\eta = f(x, t)$ , 如图2所示. 零次骑波的波前表达式为

$$\eta = f(x, t), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (10)$$

记

$$l = \int_0^a \sqrt{1 + f_x^2} dx, \quad (11)$$

$l$  表示零次骑波波前曲线长度.

设在零次骑波波前存在  $k$  个一次骑波, 一次骑波解析表达式  $\eta^1 = f^{(1,k)}(x, t)$  可借助于零次骑波  $\eta = f(x, t)$ , 经过压缩、平移、旋转过程得到. 并易知一次骑波波前曲线长度为

$$l^1 = \rho \int_0^a \sqrt{1 + f_x^2} dx, \quad (12)$$

式中,  $\rho = \rho(k)$  为压缩(相似)因子. 这样用类似的方法可确定任意  $n$  次骑波的形式, 其  $n$  次骑波波前曲线长度为

$$l^n = \rho^n \int_0^a \sqrt{1 + f_x^2} dx. \quad (13)$$

由稳定性分析, 波的破碎面上的点应具备如下性质的集合  $\Omega^b$ , 构成  $\Omega^b = \{(x, z) \mid \text{对任意 } n \text{ 存在某个 } k, \text{ 使得 } z = f^{(n,k)}(x, t)\}$ .

下面利用分形几何学, 来研究破碎面  $\Omega^b$  的自相似维数. 由维数定义

$$D_0 = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln(1/b)}, \quad (14)$$

其中,  $b$  表示边长为长度  $b$  的小弧段;  $N$  表示用边长为  $b$  的上弧段覆盖住  $\Omega^b$  这个破碎面集合所需最少的数目. 由上面破碎面集合  $\Omega^b$  所具有的动力学性质及几何性质, 可知任意  $n$  次骑波有

$$b = \rho^n l = \rho^n(k) l, \quad N = k^n.$$

最后, 由维数定义(14)可知破碎面  $\Omega^b$  的自相似维数为

$$D_0 = -\frac{\ln k}{\ln \rho(k)}. \quad (15)$$

一般情况下,  $\rho(k)$  为  $k$  的反比函数, 函数关系往往非常复杂, 下面我们以零次骑波为正弦波来说明  $D_0$  的近似计算.

## 2 实例

取零次骑波为

$$\eta = a \cos x, \quad (16)$$

其中  $a$  表示振幅, 如图 3 所示, 波前曲线长度为

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + a^2 \sin^2 x} dx, \quad (17)$$

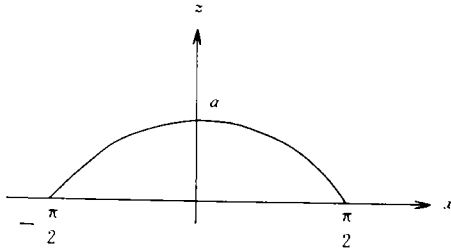


图 3

积分表达式 (17) 为一椭圆积分, 一般情况下不易积分. 当振幅  $a$  较小时, 可做下面一阶近以

$$l \approx \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 1/2 a^2 \sin^2 x) dx = 1 + \pi a^2 / 8, \quad (18)$$

在此我们可得

$$\rho = \rho(k) \approx \frac{8 + \pi a^2}{8\pi k}. \quad (19)$$

$\Omega^b$  的自相似维数  $D_0$  为

$$D_0 = \frac{\ln k}{\ln [8\pi k / (8 + \pi a^2)]}. \quad (20)$$

由  $\Omega^b$  的自相似维数表达式 (20) 可知, 对任意  $k$ , 在假设各次骑波具有自相似结构时, 破碎面集合  $\Omega^b$  的维数  $D_0$  是一分数维数. 这从另一侧面可以说明, 在我们假设的前提下, 破碎点不可能连续充满空间任意局部领域, 而是间断的散布在空间中一个具有分数结构的集合上. 在此, 我们在一些条件下推广和发展了 Longuet-Higgins 破碎波分维模型, 使之更切合实际, 尽管与自由面动力学机制相吻合的破碎波分形模型还需进一步完善. 但无疑正如 Longuet-Higgins 所说, 这为研究破碎波提供了一个新的途径及带有挑战性问题.

本文得到了国家教委的资助及物理海洋重点实验室“上层海洋动力学研究课题组”的协助, 谨表谢意.

## 参考文献

- 1 Huang N E, S R Long, C C Tung, M A Donelan, Y Yuan and R J Lai. The local properties of ocean surface waves by the phase-time method, *Geophys. Res. Lett.*, 1992, **19**, 685~688
- 2 Kerman B R. A fractal equivalent of the beaufort scale for sea-state. *Geophys. Res. Lett.*, 1993, **20**, 297~300
- 3 Longuet-Higgins M S. A fractal approach to breaking waves. *Journal of Physical Oceanography*, 1994, **24**, 1834~1838
- 4 Longuet-Higgins M S and J H Fox. Theory of the almost-highest wave: The inner solution. *J. Fluid Mech.*, 1977, **80**, 721~741
- 5 Phillips O M. *The Dynamics of the Upper Ocean*. Cambridge University Press, 1977, 60~81