

# 海气约化重力数值模式有限 差分的稳定性

徐 洪 达

(国家海洋局第一海洋研究所, 青岛)

## 摘 要

本文讨论了海气耦合约化重力模式交替方向隐式有限差分格式的稳定性条件。经计算得到这种差分格式稳定的必要条件是

$$\Delta t \leq \frac{2}{\beta |j| \Delta s}$$

依据此条件进行数值试验, 取  $\beta = 2.3 \times 10^{-11} / \text{m} \cdot \text{s}$ ,  $\Delta s = 100 \text{ km}$ ,  $|j| = 33$ ,  $\Delta t = 6 \text{ h}$ , 计算时间延续 2a。实试结果表明, 差分格式是稳定的。用此必要条件确定差分时间步长不仅保证了数值计算的稳定性, 而且计算所用机时仅是常用稳定性条件时的数十分之一或数百分之一。

许多研究表明, 埃尔尼诺/南方涛动现象存在着 2—9a 时间尺度的周期变化。就大气本身来说, 它没有如此的低频变化。有一种很能引起人们兴趣的假设是, 大气和海洋在赤道带以 2—9a 的周期形成一个很强的耦合系统。为了验证和解释这种假设, Cane<sup>[1-3]</sup>、Gent 和 Semter<sup>[5]</sup>、McCreary<sup>[11-13]</sup>、Hirst<sup>[8]</sup>、Yamagata<sup>[15]</sup>、Philips<sup>[14]</sup> 等提出一些比较简单的海洋-大气耦合数值模式。其数值模式均可写成如下形式的约化重力模式:

$$\begin{cases} u_t - \beta y v + g' h_x = F \\ v_t + \beta y u + g' h_y = G \\ h_t + d(u_x + v_y) = Q \end{cases} \quad (1)$$

其中就海洋数值模式来说,  $F$  和  $G$  为风应力 ( $\tau^x, \tau^y$ )、Rayleigh 摩擦 ( $-au, -av$ ) 和水平涡动粘滞项 ( $v \nabla^2 u, v \nabla^2 v$ ),  $Q$  为浮力源,  $g'$  为约化重力,  $\beta$  为科氏参数,  $d$  为等价深度。

为了求上述模式方程的解, 常用的方法是有限差分法。而用有限差分法时, 常遇到的问题, 这种差分格式的稳定性如何? 换言之, 当空间步长  $\Delta s$  确定之后, 时间步长  $\Delta t$  应取多大, 才能保证差分格式是稳定的? 此问题在数值模拟研究中是非常关键的问题。此问题解决得好, 不仅能保证计算机计算顺利进行和得到比较理想的数值模拟结果, 而且能节约大量的计算机时间和费用。

偏微分方程有限差分的稳定性问题, 一些教科书和研究报告虽已有些论述, 但目前尚未见到有关对上述约化重力模式有限差分格式稳定性的讨论。由于讨论上述模式有限差分格式稳定性条件的计算比较繁杂和困难, 一些从事物理海洋研究的学者多回避对上述问题的讨论, 而采用数值实验或其他稳定性条件来确定时间步长。显然, 这样做是带有一定的盲目性。因此, 有必要对约化重力模式有限差分格式的稳定性进行讨论。

为方便起见, 在此先讨论  $F=G=Q=0$  情况下的约化重力模式交替方向隐式差分格式的稳定性条件。

### 一、差分格式

用交替方向隐式差分法, 对约化重力模式方程组进行差分所用网格为交错网格, 变量的定义位置如图 1 所示。

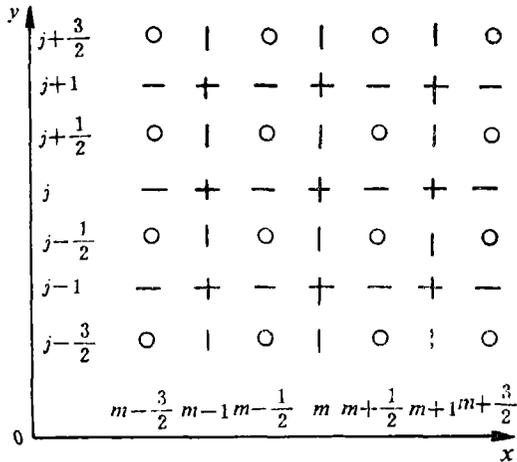


图 1 交错网格和变量的位置

+ :  $h$    - :  $u, \tau^x$    | :  $v$

前半时间步  $[k\Delta t \rightarrow (k + \frac{1}{2})\Delta t]$ , 分别

在  $(m + \frac{1}{2}, j)$  和  $(m, j + \frac{1}{2})$  点对

方程组 (1) 差分得 ..

$$\frac{u_{m+\frac{1}{2}, j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{m+\frac{1}{2}, j}^k}{\frac{\Delta t}{2}} - \frac{\beta j \Delta s}{4} (v_{m, j-\frac{1}{2}}^k + v_{m, j+\frac{1}{2}}^k + v_{m+1, j-\frac{1}{2}}^k + v_{m+1, j+\frac{1}{2}}^k)$$

$$+ g' \frac{h_{m+1, j}^{k+\frac{1}{2}} - h_{m, j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta s} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{v_{m, j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{m, j+\frac{1}{2}}^k}{\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\beta j \Delta s}{4} (u_{m-\frac{1}{2}, j+1}^{k+\frac{1}{2}} + u_{m-\frac{1}{2}, j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{m+\frac{1}{2}, j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{m+\frac{1}{2}, j+1}^{k+\frac{1}{2}}) + g' \frac{h_{m, j+1}^k - h_{m, j}^k}{\Delta s} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{h_{m, j}^{k+\frac{1}{2}} - h_{m, j}^k}{\frac{\Delta t}{2}} + d \left( \frac{u_{m+\frac{1}{2}, j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{m-\frac{1}{2}, j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta s} + \frac{v_{m, j+\frac{1}{2}}^k - v_{m, j-\frac{1}{2}}^k}{\Delta s} \right) = 0. \quad (4)$$

后半时间步  $\left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \Delta t \rightarrow (k+1) \Delta t \right]$ , 分别在  $\left( m + \frac{1}{2}, j \right)$ 、 $\left( m, j + \frac{1}{2} \right)$  和  $(m, j)$  点对方程组 (1) 差分得:

$$\frac{u_{m+\frac{1}{2},j}^{k+1} - u_{m+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} - \frac{\beta j \Delta s}{4} \left( v_{m,j-\frac{1}{2}}^{k+1} + v_{m,j+\frac{1}{2}}^{k+1} + v_{m+1,j-\frac{1}{2}}^{k+1} + v_{m+1,j+\frac{1}{2}}^{k+1} \right) + g' \frac{h_{m+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - h_{m,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta s} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{v_{m,j+\frac{1}{2}}^{k+1} - v_{m,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\beta j \Delta s}{4} \left( u_{m-\frac{1}{2},j+1}^{k+\frac{1}{2}} + u_{m-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{m+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{m+\frac{1}{2},j+1}^{k+\frac{1}{2}} \right) + g' \frac{h_{m,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - h_{m,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta s} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{h_{m,j}^{k+1} - h_{m,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + d \left( \frac{u_{m+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{m-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta s} + \frac{v_{m,j+\frac{1}{2}}^{k+1} - v_{m,j-\frac{1}{2}}^{k+1}}{\Delta s} \right) = 0. \quad (7)$$

## 二、稳定性的必要条件

在物理海洋的数值模拟研究中, 有限差分格式的稳定性问题通常采用一种近似的稳定性条件:

$$\Delta t < \frac{\alpha \Delta s}{\sqrt{mgH}} \quad (8)$$

其中  $m$  为空间维数,  $H$  为水深,  $g$  为重力加速度,  $\alpha$  为常数. 对于用式 (8) 表示的稳定性条件, 追其来源, 它是以简单波动方程

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gH \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_i^2}$$

的显式差分格式的稳定性条件(CFL条件)为依据的. 由于交替方向隐式差分格式与显式差分格式有本质区别, 再者上述简单波动方程与约化重力模式方程组也相差很大, 显然, 如果用式 (8) 作为约化重力模式的交替方向隐式差分格式的近似稳定性条件是不合理的.

为了寻求式 (2) - (7) 所表示的交替方向隐式差分格式的稳定性条件, 现用如下方法:

设模式(1)的通解为

$$\overline{U}(x, y, t) = U_{\sigma_1 \sigma_2} e^{i(\sigma_1 x + \sigma_2 y + \sigma_3 t)}.$$

此处

$$\overline{U} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ h \end{Bmatrix},$$

于是, 在时刻  $k\Delta t$  及点  $(m\Delta s, j\Delta s)$  有

$$h_{m, j}^k = h_{\sigma_1 \sigma_2} e^{i(\sigma_1 m \Delta s + \sigma_2 j \Delta s + \sigma_3 k \Delta t)},$$

$$u_{m, j}^k = u_{\sigma_1 \sigma_2} e^{i(\sigma_1 m \Delta s + \sigma_2 j \Delta s + \sigma_3 k \Delta t)},$$

$$v_{m, j}^k = v_{\sigma_1 \sigma_2} e^{i(\sigma_1 m \Delta s + \sigma_2 j \Delta s + \sigma_3 k \Delta t)}.$$

不难计算得到

$$u_{m+\frac{1}{2}, j}^{k+\frac{1}{2}} = u_{m, j}^{k+\frac{1}{2}} e^{i\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}},$$

$$h_{m+\frac{1}{2}, j}^{k+\frac{1}{2}} - h_{m, j}^{k+\frac{1}{2}} = i2\sin\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right) e^{i\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}} h_{m, j}^{k+\frac{1}{2}},$$

$$u_{m+\frac{1}{2}, j}^k = u_{m, j}^k e^{i\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}},$$

$$\begin{aligned} & v_{m, j-\frac{1}{2}}^k + v_{m, j+\frac{1}{2}}^k + v_{m+1, j-\frac{1}{2}}^k + v_{m+1, j+\frac{1}{2}}^k \\ &= 4\cos\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right) \cos\left(\sigma_2 \frac{\Delta s}{2}\right) e^{i\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}} v_{m, j}^k. \end{aligned}$$

把以上4式代入式(2)并化简得:

$$\begin{aligned} & u_{m, j}^{k+\frac{1}{2}} + ig' \frac{\Delta t}{\Delta s} \sin\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right) h_{m, j}^{k+\frac{1}{2}} \\ &= u_{m, j}^k + \frac{1}{2} \beta j \Delta s \Delta t \cos\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right) \cos\sigma_2 \frac{\Delta s}{2} v_{m, j}^k. \end{aligned} \quad (10)$$

同理, 可将式(3)-(7)化为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \beta j \Delta s \Delta t \cos\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right) \cos\left(\sigma_2 \frac{\Delta s}{2}\right) u_{m, j}^{k+\frac{1}{2}} + v_{m, j}^{k+\frac{1}{2}} = -ig' \frac{\Delta t}{\Delta s} \sin\left(\sigma_2 \frac{\Delta s}{2}\right) \\ & \quad \times h_{m, j}^k + v_{m, j}^k, \end{aligned} \quad (11)$$

$$h_{m, j}^{k+\frac{1}{2}} + id \frac{\Delta t}{\Delta s} \sin\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right) u_{m, j}^{k+\frac{1}{2}} = h_{m, j}^k - id \frac{\Delta t}{\Delta s} \sin\left(\sigma_2 \frac{\Delta s}{2}\right) v_{m, j}^k, \quad (12)$$

$$u_{m,j}^{k+1} - \frac{1}{2} \beta j \Delta s \Delta t \cos\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right) \cos\left(\sigma_2 \frac{\Delta s}{2}\right) v_{m,j}^{k+1} = u_{m,j}^{k+\frac{1}{2}} - i \frac{\Delta t}{\Delta s} g' \times \sin\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right) h_{m,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

$$v_{m,j}^{k+1} + i g' \frac{\Delta t}{\Delta s} \sin\left(\sigma_2 \frac{\Delta s}{2}\right) h_{m,j}^{k+1} = -\frac{1}{2} \beta j \Delta s \Delta t \cos\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right) \cos\left(\sigma_2 \frac{\Delta s}{2}\right) \times u_{m,j}^{k+\frac{1}{2}} + v_{m,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

$$i d \frac{\Delta t}{\Delta s} \sin\left(\sigma_2 \frac{\Delta s}{2}\right) v_{m,j}^{k+1} + h_{m,j}^{k+1} = -i d \frac{\Delta t}{\Delta s} \sin\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right) u_{m,j}^{k+\frac{1}{2}} + h_{m,j}^{k+\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

由式(10) — (15) 容易计算得特征矩阵为:

$$[G] = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1}(1-\lambda) & \frac{c_1 - c_2 c_3 d g'}{a_1} + \frac{c_1 + c_2 c_3 d g'}{a_1} \lambda \\ -\frac{c_1}{a_1}(1+\lambda) & a_2 - a_3 \lambda \\ -i \frac{c_2 d}{a_1}(1-\lambda) & -i \frac{c_1 c_2 + c_3}{a_1} d + i \frac{c_1 c_2 - c_3}{a_1} d \lambda \\ & -i \frac{c_2 g'}{a_1}(1+\lambda) \\ & i \left( \frac{c_1 c_2}{a_1} - c_3 \right) g' - i \left( \frac{c_1 c_2}{a_1} + c_3 \right) g' \lambda \\ & \frac{1}{a_1}(1-\lambda) \end{pmatrix} \quad (16)$$

其中

$$c_1 = \frac{1}{2} \beta j \Delta s \Delta t \cos\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right) \cos\left(\sigma_2 \frac{\Delta s}{2}\right)$$

$$c_2 = \frac{\Delta t}{\Delta s} \sin\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right)$$

$$c_3 = \frac{\Delta t}{\Delta s} \sin\left(\sigma_2 \frac{\Delta s}{2}\right)$$

$$a_1 = 1 + c_2^2 d g'$$

$$a_2 = 1 - \frac{c_1^2 - c_1 c_2 c_3 d g'}{1 + c_2^2 d g'}$$

$$a_3 = 1 - \frac{c_1^2 + c_1 c_2 c_3 dg'}{1 + c_2^2 dg'}$$

由特征矩阵可得特征方程为

$$\lambda^3 - \frac{3 - c_2^2 dg' - c_3^2 dg' - c_2^2 c_3^2 d^2 g'^2 - 4c_1^2}{1 + c_2^2 dg' + c_3^2 dg' + c_2^2 c_3^2 d^2 g'^2} \lambda^2 + \frac{3 - c_2^2 dg' - c_3^2 dg' - c_2^2 c_3^2 d^2 g'^2 - 4c_1^2}{1 + c_2^2 dg' + c_3^2 dg' + c_2^2 c_3^2 d^2 g'^2} \lambda - 1 = 0. \quad (17)$$

解此方程得:

$$\lambda_1 = 1,$$

$$|\lambda_{2,3}| = \sqrt{2 \left( \frac{c_2^2 dg' + c_3^2 dg' + c_2^2 c_3^2 d^2 g'^2 + 2c_1^2 - 1}{1 + c_2^2 dg' + c_3^2 dg' + c_2^2 c_3^2 d^2 g'^2} \right)^2 - 1}.$$

依据有限差分方程稳定性的 von Neuman 必要条件

$$|\lambda_i| \leq 1 + O(\Delta t)$$

知: 要式(2) — (7) 所示交替方向隐式差分格式稳定, 则必须  $|\lambda_{2,3}| \leq 1$ , 即必须

$$\left| \frac{c_2^2 dg' + c_3^2 dg' + c_2^2 c_3^2 d^2 g'^2 + 2c_1^2 - 1}{1 + c_2^2 dg' + c_3^2 dg' + c_2^2 c_3^2 d^2 g'^2} \right| \leq 1. \quad (18)$$

由此不等式得

$$c_1^2 \leq 1,$$

即

$$\left| \frac{1}{2} \beta j \Delta s \Delta t \cos\left(\sigma_1 \frac{\Delta s}{2}\right) \cos\left(\sigma_2 \frac{\Delta s}{2}\right) \right| \leq 1,$$

亦即

$$|j| \Delta s \beta \Delta t \leq 2.$$

由此可知, 式(2) — (7) 差分格式稳定的必要条件是

$$\Delta t \leq \frac{2}{|j| \Delta s \beta}. \quad (19)$$

此式表明, 式(2) — (7) 差分格式不是无条件稳定的, 其稳定性与科氏参数  $\beta$  和网格点  $(m\Delta s, j\Delta s)$  至赤道的距离  $|j|\Delta s$  有关, 亦即与数值模拟区域在赤道南北的范围大小  $(|j|\Delta s)$  有关.

### 三、数值试验

按式(19)所示必要条件进行数值试验: 计算区域取赤道太平洋区域, 并取  $\Delta s = 100$  km,  $|j| = 33$ ,  $\beta = 2.3 \times 10^{-11} / \text{m} \cdot \text{s}$ . 将这些值代入式(19)得:

$$\Delta t \leq \frac{2}{33 \times 2.3 \times 10^{-11} \times 10^5} \approx 26350.46(\text{s}) \approx 7.26(\text{h})$$

为了便于循环控制计算, 数值试验时取  $\Delta t = 6\text{h}$ , 计算延续时间为  $2\text{a}$ , 计算结果表明差分格式是稳定的。

数值试验中, 取  $F = -au + \tau^x$ ,  $G = -av$  和  $Q = -bh$  或  $Q = -b(h-d)$ 。用此数值模式模拟赤道流系对风的响应, 计算中取  $\Delta t = 6\text{h}$ , 计算延续时间为  $2\text{a}$ , 计算结果表明: 差分格式是稳定的, 数值模拟结果与实测结果比较一致 (数值模拟结果另文发表)。

就时间步长  $\Delta t$  来说, 如果按稳定性的常规判据 (8) 来确定  $\Delta t$ , 当取  $H = 100\text{m}$ ,  $\Delta s = 100\text{km}$  时, 则必须取  $\Delta t < 18\text{min}$ 。显然, 用式 (19) 确定的  $\Delta t$  是用式 (18) 确定  $\Delta t$  的 23 倍多。如果使用约化重力模式时, 取  $|j| = 2$ ,  $\Delta s = 100\text{km}$ , 则由式 (19) 可以计算出  $\Delta t \leq 434782.6(\text{s} \approx 12).77\text{h}$ , 这是  $18\text{min}$  的 402 倍。如果  $|j|$  取得再小一些, 则  $\Delta t$  可取得更大。这就表明, 用交替方向隐式差分法求海气耦合约化重力模式的数值解时, 依据稳定性条件 (19) 确定差分时间步长  $\Delta t$  进行数值模拟, 计算用计算机时间仅是用条件 (8) 的数十分之一或数百分之一。很显然, 这将节约大量的机时和费用。

综上所述可明显看出, 海气耦合约化重力数值模式交替方向隐式有限差分格式的稳定性条件与常用的 CFL 条件 (8) 是完全不同的, 它稳定的必要条件与科氏参数  $\beta$  和数值模拟区域在赤道南北的范围大小 ( $|j|\Delta s$ ) 有关。模拟区域在赤道南北的范围越小, 则差分时间步长可取得越大。用本文所得到的稳定性必要条件式 (19) 确定时间步长, 不但保证了数值计算的稳定性, 而且较常用的 CFL 条件式 (8) 节约了数十倍或数百倍的机时和费用。因此, 本文所得结果不仅在学术上具有一定意义而且有实用价值。

### 参 考 文 献

- (1) Cane, M.A., The response of an equatorial to simple wind stress patterns. I. Model formulation and analytic results, *J. Mar. Res.*, 37 (1979), 233—252.
- (2) Cane, M.A. and E.S. Sarachik, Forced baroclinic ocean motion. I. The linear equatorial unbounded case, *J. Mar. Res.*, 34 (1976), 624—629.
- (3) Cane, M.R. and R.J. Patton, A numerical model for low-frequency equatorial dynamics, *Journal of Physical Oceanography*, 14 (1984), 1853—1863.
- (4) Gill, A.E., Elements of coupled ocean-atmosphere models for the tropics, *Coupled Ocean-Atmosphere Models (Elsevier Oceanography Series, 40)*, Elsevier Amsterdam, 303—327.
- (5) Gent, P.R. and A.J. Semtner, Energy tripping near the equator in a numerical ocean model, *Journal of Physical Oceanography*, 10 (1980), 823—842.
- (6) Forsythe, G.E. and W.R. Wasow, *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley and Sons Inc., 1960.
- (7) Heckley, W.A. and A.E. Gill, Some simple analytical solutions to the problem of forced equatorial long wave, *Quart. J. R. Meteorol. Soc.*, 110 (1984), 203—217.
- (8) Hirst, A.C., Free equatorial instabilities in simple coupled atmosphere-ocean models, *Coupled Ocean-Atmosphere Models (Elsevier Oceanography Series, 40)*, Elsevier Amsterdam, 1985, 153—165.
- (9) Leenderts, J.J., Aspects of a computational for long period water-wave propagation, Memorandum, RM-5294-PR, Rand Corporation, May, 1967, 1—50.
- (10) Lei Guangyao and Xu Hongda, Some methods in numerical calculation of shallow water

- tides, *Marine Environmental Science* (in Chinese), 2 (1983).
- [11] McCreary, J.P., Eastern tropical ocean response to changing wind system, with application to El Nino, *Journal of Physical Oceanography*, 6 (1976), 632—645.
- [12] McCreary, J.P. and D.L.T. Anderson, A simple models of El Nino and the Southern Oscillation, *Coupled Ocean-Atmosphere Models* (Elsevier Oceanography Series, 40), Elsevier Amsterdam, 375—370.
- [13] McCreary, J. P. *et al.*, A model of tropical ocean-atmosphere interaction, *Mon. Wea. Rev.* 111 (1983), 370—389.
- [14] Philips, P. J., A simple model of the wind-driven tropical ocean, *Journal of Physical Oceanography*, 17 (1987), 2002—2015.
- [15] Yamagata, T., Stability of a simple air-sea coupled model in the tropical, *Coupled Ocean-Atmosphere Models* (Elsevier Oceanography Series, 40), Elsevier Amsterdam, 1985, 637—657.