

偏态海浪过程的数值模拟

刘新安 黄培基

(国家海洋局第一海洋研究所, 青岛)

摘 要

本文对Polge等人提出的“相关传递法”作了进一步数学分析, 论证了其成立条件和适用范围。考虑波面偏度对谱形的影响, 将模拟的靶谱加以改造, 建立了“准相关传递法”。在同时考虑波剖面高度分布和谱两个条件下, 对偏态海浪过程进行数值模拟。就模拟结果, 分析了以Weibull分布拟合波高分布时, 其波面偏度对波高分布中两参数的影响。

文中选用1980—1981年在胶州湾观测的波浪资料对“准相关传递法”加以检验和比较。结果表明: 就波高分布、波面极大(小)值分布而言, 准相关传递法明显优于传统的线性叠加法, 比线性叠加法模拟的结果更接近于实测资料。

近20年来, 随着计算机的高度发展和推广应用, 已能通过计算机取得大量人为资料来模拟海浪。通过数值模拟这种途径来研究海浪具有经费少, 时间短, 同时能分别考虑各种不同因子影响等特点, 故日益成为一种研究海浪理论和应用问题的有力工具。

自Borgman^[1]根据随机过程理论提出通过波谱以无限个子波叠加法和数字过滤法来实现海浪过程的数值模拟以来, 一些作者^[1-6]以此种模拟方法对海浪谱理论、统计性质及应用等进行了较细致的研究, 获得了一些引人注目的结果。然而, 上述线性叠加法和数字过滤法所模拟出的海浪过程是正态的, 波剖面具有垂直方向上的对称性。但实际的海浪由于非线性相互作用、地形和底摩擦等因素的影响, 海浪过程是偏态的, 波剖面垂直方向是不对称的, 波剖面高度分布不再符合正态分布, 而接近于Gram-Charlier级数^[7-10]。因此, 模拟的海浪过程不仅要使模拟谱与靶谱相一致, 更要使其波面分布与实际海浪过程的波面高度分布相接近, 就必须在模拟方法上进行改造。

Hudspeth^[11]依据动力学方程考虑非线性相互作用的影响, 将以上方法产生的波面作进一步处理, 得到具有一定波面偏度的波面。他们的工作虽然为偏态海浪过程的数值模拟提供了一种可行的途径, 但其模拟方法中还存在两个缺陷。其一是该法仍是由谱一个因子来实现, 反映波面不对称因子的波面偏度单纯地由波波间的非线性相互作用来决定, 没有包含地形、底摩擦等的影响, 因此随着谱的确定而波面偏度为常值, 但该值又与实测值有差异, 且不可调整, 同时其计算工作繁杂。其二是既然考虑波波间的非线性相互作用, 则对靶谱

分量的取得就应以Tick^[12]建立的非线性海浪模型来进行, 而不应采用海浪的线性模型。

近来Polge^[13]提出了一种产生既满足给定的分布又符合所要求谱特性的伪随机序列的方法——相关传递法。本文对Polge等人提出的“相关传递法”作了进一步数学分析, 论证了其成立条件和适用范围。考虑波面偏度对谱形的影响, 将模拟的靶谱加以改造, 建立了“准相关传递法”。依此数值模拟办法得到的结果分析了波面偏度对波高和波面极大(小)值统计分布的影响, 同时用胶州湾的实测资料进行检验。

一、相关传递法及其数学分析

(一) 相关传递法

对于海浪过程的数值模拟, 最常要求的两个特性是波剖面高度分布为所要求的分布(线性模型为高斯分布, 非线性模型为A型Gram-Charlier级数)和给定的波谱(或相关函数)。如何使产生的伪随机序列既有规定的波剖面高度分布又有所要求的谱(相关函数)。Polge等人于1973年提出了“相关传递法”。该方法的基本依据是: 一个随机序列的分布只取决于其各个样本点的值与序列的次序无关, 而其相关(谱)特性非但决定于样本点值, 更重要地还取决于序列的次序。相应于完全不同分布的两个随机序列, 如果它们的排序方式相同, 则有近似相同的相关(谱)特性。因此, 如果产生两个随机序列, 第一个序列具有所要求的分布而谱任意, 称之为基础序列, 第二个序列具有所要求的谱而其分布任意, 称之为参考序列。只要将基础序列按参考序列的次序进行重排, 便发生相关(谱)特性的“传递”, 使经过重排的基础序列在保持其分布不变的条件下, 获得所需的相关(谱)特性。

对于上述相关传递法成立的数学依据, Polge用反证法给予简单的证明, 但对该方法适用的条件和范围并没有从数学上做分析。

(二) “相关传递法”的数学分析

定义: 对所有样本点 (x_i, y_i) $i = 1, 2, \dots, N$, 若存在连续可微函数 $f(x)$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 都有:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\max_{1 \leq i \leq N} |y_i - f(x_i)| \geq \varepsilon) = 0, \quad (1)$$

则称点对 (x_i, y_i) 的两个变量间依概率满足函数关系 $f(x)$, 记作: $y_i \stackrel{P}{=} f(x_i)$ 。

“相关传递法”中两个序列点对间的回归函数 $f(x) = E\{y/x\}$ 可利用两个序列分布函数求得(式(9)、式(12))。由上述定义和随机近似: $y_i \stackrel{P}{=} f(x_i)$, 即, $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$, 其中 ε_i 是随机白噪声, $\sigma_\varepsilon^2 = o(\sigma_y^2)$ 随着 N 的增大而减小¹⁾, 在近似下有: $y_i = f(x_i)$ 。

已知: (1) 参考序列为 $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, 满足给定的谱特性和分布为高

1) 文献[14]中得结论: 样本点数 N 越大, 与所规定的分布和功率谱的偏差越小。

本文海浪数值模拟中选取如下三种谱模式:

(1) 文圣常等^[16]提出的风浪谱:

$$\frac{S(\omega)}{H^2 T} = 3.13 \times 10^{-7} (3.571 - 0.527 p) \cdot (T\omega)^{-6}, \quad 0 < T\omega \leq 4.98,$$

$$\begin{aligned} \frac{S(\omega)}{H^2 T} = 1.09 \times 10^{-2} & \left[p + (194.09 - 134.32 p) (0.175 T\omega - 1)^2 \right. \\ & - (236.97 - 137.97 p) (0.175 T\omega - 1)^3 \\ & - (6094.0 - 3743.8 p) (0.175 T\omega - 1)^4 + (13726 \\ & \left. - 7418 p) (0.175 T\omega - 1)^5 \right], \quad 4.98 < T\omega \leq 6.58, \end{aligned}$$

$$\frac{S(\omega)}{H^2 T} = 11.7 (2.663 - 0.393 p) (T\omega)^{-4}, \quad T\omega > 6.58, \quad (19)$$

其中, H 、 T 分别为有效波高和周期, $p = -0.487 + 63.43 \frac{H}{T^2} - 129.1 \frac{H^2}{T^4}$.

(2) P-M 谱^[17]

$$S(\omega) = 0.78 \omega^{-5} \exp \left[-3.11 \omega^{-4} H \frac{1}{3} \right], \quad (20)$$

其谱峰频率为: $\omega_p = 1.258 H \frac{1}{3}^{-\frac{1}{4}}$.

(3) JONSWAP 谱^[5]:

$$S(f) = a_1 H^2 T_p \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-m} \exp \left[-\frac{m}{n} \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-n} \right] \exp \left[-\frac{(f/f_p - 1)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (21)$$

$$\text{其中, } f_p = \frac{1}{1.05 T \frac{1}{3}}, \quad \sigma = \begin{cases} 0.07, & 0.7 < \frac{f}{f_p} \leq 1, \\ 0.09, & 1 < \frac{f}{f_p} \leq 1.4, \end{cases}$$

a_1 的确定为满足关系式: $H \frac{1}{3} = 4.004 \sqrt{m_0}$ 的常数.

(二) 相关传递法模拟海浪过程

1. 参考序列的产生

为产生具有所要求的谱特性的参考序列, 我们只需用线性叠加法来模拟即可. 设给的谱为 $S(\omega)$, 则波面为:

$$\xi(t) = 2 \int_0^\infty \sqrt{S(\omega)} d\omega \cos(\omega t + \varepsilon), \quad (22)$$

式中, t 表示时间, ε 为 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机相位.

设 $S(\omega) = 0$, $\omega \in (N, F)$, $N < F$, 将频率区间 $[N, F]$ 分成 m 个子区间:

$$N = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m = F,$$

并取 $\hat{\omega}_i = (\omega_{i-1} + \omega_i) / 2$, $\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{i-1}$.

若每个子区间足够小, 则线性海浪的波面 $\xi(t)$ 就可以看成由 m 个简单子波叠加的结果, 此时波面为:

$$\xi(t) = 2 \sum_{i=1}^m \sqrt{S(\omega_i) \Delta\omega_i} \cos(\omega_i t + \varepsilon_i), \quad (23)$$

几个参量的确定:

(1) 谱频范围 $[N, F]$ 的确定, 我们取:

$$N = \omega_p / 3 \leq \omega \leq 4 \omega_p = F,$$

其中 ω_p 为峰值频率.

(2) $\Delta\omega$ 和 m 的确定, $\Delta\omega$ 的划分有不同的方法, 如: 等间法、等能量法等, 本文采用等间法、即, $\Delta\omega = (F - N) / m$, m 为组成波个数, 我们取 $m = 300$.

2. 基础序列的产生

如前述, 用式 (18) 来描述实际海浪的波剖面高度分布. 当变量 (ξ) 进行标准化后, 该分布函数 $p(\xi)$ 在区间 $[-4, 4]$ 以外取值近似为 0, 即 $p(\xi) = 0, \xi \in [-4, 4]$. 本文采用离散逼近法^[10]来产生符合式(18)要求的随机序列. 对于 $[0, 1]$ 区间上均匀分布的随机数的产生, 采用文献[5]中所述的方法, 考虑到产生的随机数的均匀性较差, 本文利用在产生的众多的随机数中再随机选取的多重随机选取的办法来进行, 得到满意的均匀分布的随机数. 由图1中我们可看出用该法产生的随机序列的统计分布是符合式(18)表示的分布.

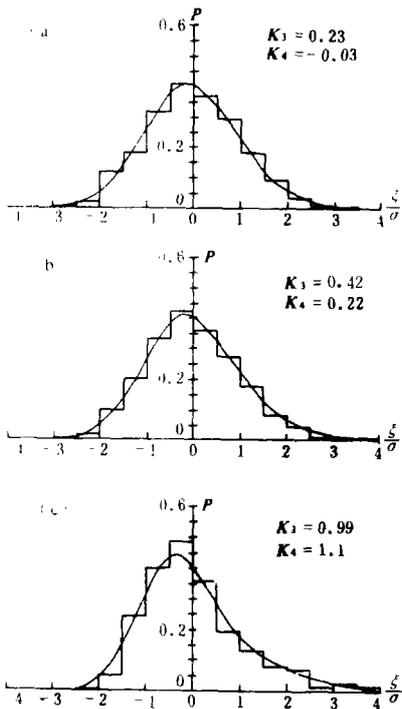


图1 产生的给定不同波面偏度下波面高度分布序列的统计分布

3. 相关传递法的实现

(1) 由上述产生的参考序列 $\{x_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, 将其由大到小进行排列而形成整数组 $\{E(i)\}, i = 1, 2, \dots, N$. 即, 如果在 $\{x_i\}$ 中, 样本点 x_{i_1} 最大, x_{i_2} 次之, \dots, x_{i_N} 最小, 则有:

$$E(1) = i_1, \quad E(2) = i_2, \dots,$$

$$E(N) = i_N.$$

(2) 将产生的基础序列 $\{y_i\}, i = 1, 2, \dots, N$, 由大到小进行排序, 得新的序列 $\{y'_i\}, i = 1, 2, \dots, N$. 其中:

$$y'_i = y_{E(i)}, \quad i = 2, 3, \dots, N.$$

(3) 按照整数组 $\{E(i)\}$ 来重排 $\{y'_i\}$,

即有:

$$Z(E(i)) = y'_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

由此获得的序列 $\{Z(i)\}, i = 1, 2, \dots, N$, 就是我们最终所要模拟的结果.

在同一靶谱下, 于不同偏度下的波面概率分布, 依上述相关传递法模拟出各自的海浪过程. 为考察通过相关传递后模拟谱与靶谱的差异, 将模拟出的序列做谱估计, 其结果见图2. 由图2看出, 通过相

关传递后, 随着波面偏度增大, 模拟谱的谱峰值越偏离靶谱。正如第一节的数学分析中指出, 当参考序列与基础序列的分布不同时, 通过相关传递后, 相关(谱)特性只当式(13)中 $d_1 \neq 1, d_r = 0 (r = 2, \dots, \infty)$ 时, 模拟谱与靶谱近似相等。因此, 为使模拟谱与靶谱相同, 就需分析波面偏度对谱形的影响。

(三) 波面偏度 (K_3) 对谱的影响

不少作者 [8-10] 讨论了波面高度分布函数中偏度 (K_3) 和峰度 (K_4) 与谱特征值之关系, 得到不同的由谱特征值求波面偏度的表达式。但是, 波面偏度对谱形怎样影响, 影响的程度如何? 至今尚未见结果。取 $p_y = p(\xi)$, 将其代入式(11)、式(12), 通过数值计算求得不同偏度下的转换函数 $f(x)$, 由式(13)获得其相关函数 $R_{yy}(\omega)$, 经富氏变换后得谱 $S_{yy}(\omega)$ 。如图3所示。

由计算(图3)和运用相关传递法研究的共同结果是: 模拟谱在谱峰附近与靶谱有明显的偏离, 且这种偏离现象随着波面偏度的增大而愈加明显。而在谱的其他部分只产生极小的误差, 可以认为是符合得相当好。在实际应用中, 对波谱峰频周围的谱值特别重视。因此, 对于上述模拟结果, 参照 JONSWAP 谱是引进谱峰升高因子从 P-M 谱发展起来的, 因而我们引入谱峰下降因子来拟合模拟谱。即若靶谱为 $S(\omega)$, 则在偏度 K_3 下得到模拟谱 $\hat{S}(\omega)$ 为:

$$\hat{S}(\omega) = S(\omega) \times \gamma \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma_0^2 \omega_p^2} \right], \quad (24)$$

其中 $\gamma = \gamma(K_3)$, ω_p 为峰值频率, $\sigma_0 = 0.07$ 。

我们以前面选取的三种谱形, 在不同波面偏度下经过多次模拟, 用最小二乘法获得了 $K_3 - \gamma$ 的经验关系式(图4):

$$\gamma(K_3) = 1 - 0.095 K_3^{1.5}. \quad (25)$$

(四) 偏态海浪过程数值模拟的准相关传递法

为使模拟谱 $\hat{S}(\omega)$ 和靶谱 $S(\omega)$ 相同, 由前面分析知, 只要将模拟靶谱 $\bar{S}(\omega)$ 加以改造, 即以:

$$\bar{S}(\omega) = S(\omega) \gamma(K_3)^{-1} \exp \left[\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma_0^2 \omega_p^2} \right] \quad (26)$$

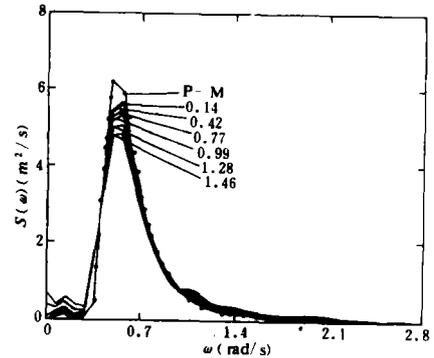


图2 相关传递下模拟谱与靶谱

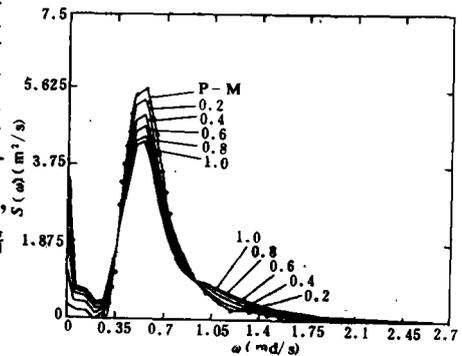


图3 波面偏度对谱的影响(计算结果)

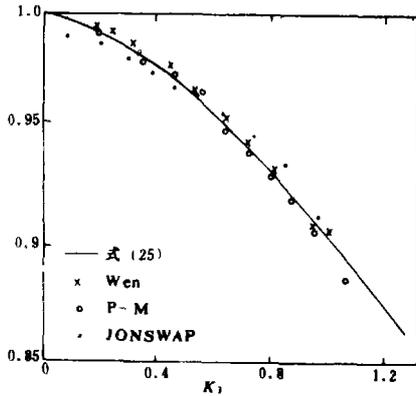


图4 波面偏度与谱峰
下降因子的经验关系

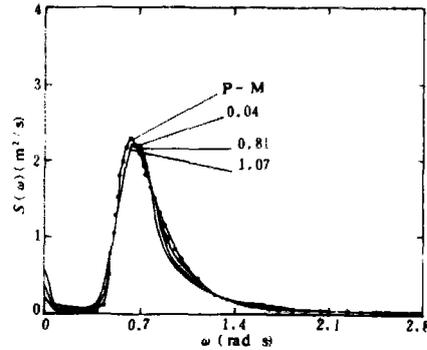


图5 准相关传递法得模拟谱与靶谱

作为靶谱来产生参考序列。将所有的 $S(\omega)$ 换成 $\bar{S}(\omega)$ ，其他步骤不变，这就是我们最终采用的准相关传递法。

图5为准相关传递法得到的一组模拟结果。由该图可以看出模拟谱与靶谱吻合的程度是相当好的，与图2比较明显地更接近于靶谱。

三、波面偏度 (K_3) 对波面极大 (小) 值及波高统计分布的影响

(一) 波面偏度对波高分布的影响

波高的瑞利分布虽得到了广泛应用，但关于深水波高是否遵从此分布一直存在着争议，特别是70年代中期以后，一部分作者分析实测资料得到的结果表明：由瑞利分布给出的不小于某一给定值的波高的概率偏大，对于小的概率，此差异更明显。近年Tayfun^[19]和Naess^[20]从正态过程的随机变量联合概率密度公式出发，导出的波高分布也偏离瑞利分布，只有当其 $\gamma(\frac{T}{2}) \rightarrow -1$ 时才为瑞利分布。目前不少作者^[5]采用Weibull分布

$$F(H) = \exp \left[-\beta \left(\frac{H}{H} \right)^a \right] \quad (27)$$

来拟合实测的波高分布，获得较好的结果。

为了考察波面偏度对Weibull分布中的两个参量 a 、 β 的影响，我们在给定谱下，运用准相关传递法数值模拟不同偏度下的偏态海浪过程。每次模拟中，频率间隔为 0.5 s，样本点个数为 3 000，所含的波约 300—400 个，模拟的次数为 50。然后对模拟出的每一次记录，以上跨零点法定义波高，并进行波高统计分析，用上述的 Weibull 分布来拟合波高分布，

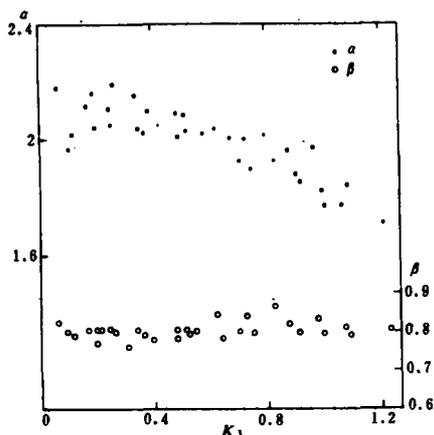


图6 波面偏度对Weibull分布中
两参量 α 、 β 的影响(模拟结果)

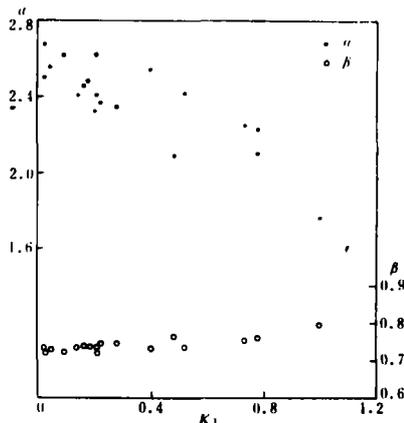


图7 波面偏度对Weibull分布中
两参数量 α 、 β 的影响(实测结果)

求出参量 α 、 β 值,并点绘成图6。由图6看出 α 随着 K_3 的增大而减小,但 β 几乎不随 K_3 的变化而变化(其值大约在0.79—0.80左右)。由于非线性效应是产生波面偏度的主要原因。因此,我们认为导致“Weibull分布指数 α 随 K_3 的增大而减小”这一结果的主要原因是非线性效应。

另外,我们还分析了1980—1981年间在胶州湾所观测的海浪资料,对每一段实测海浪记录计算其波面偏度和作波高统计分布,以Weibull分布来拟合,用最大似然法,求参量 α 、 β 的值,得到如图7所示的波面偏度 K_3 与参数 α 、 β 之间的散点图,该图反映出的 α 随 K_3 的变化趋势与我们的数值模拟结果(图6)是一致的,且 β 亦基本不随波面偏度变化,从而证实了我们数值模拟的结论。

Tayfun^[9]认为,波的非线性相互作用使大波个数增加,但波浪破碎使大波个数减少。在数值模拟结果(图6)中,指数 α 变化区间为[1.7, 2.4],而实测结果(图7)中, α 的变化范围为[2.0, 2.8],对此差异,作者认为可能是在数值模拟中未考虑波浪破碎和谱宽度影响所致,对此作进一步的研究是必要的。

(二) 波面偏度对波面极大(小)值分布的影响

Tayfun^[19]考虑波浪的非线性效应,提出以偏度 a 为参量的波面极大(小)值分布公式:

$$f_{\eta} = (d\bar{\eta}/d\eta) \cdot f_{\bar{\eta}} |_{\bar{\eta} = h(\eta)}, \quad (28)$$

其中,

$$\eta = \bar{\eta} (1 \pm a\beta\bar{\eta}/2),$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ \pm \frac{1}{a\beta} [-1 + (1 \pm 2a\beta x)^{\frac{1}{2}}], & a > 0, \end{cases}$$

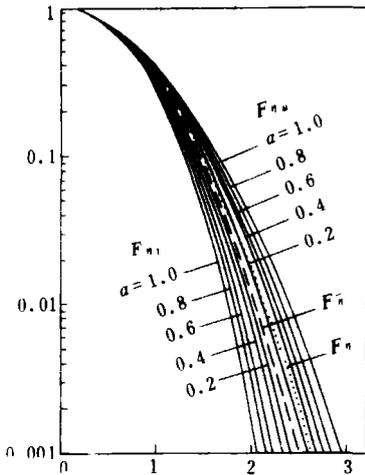


图8 偏度 α 对波面极大(小)值影响的理论线 (Tayfun, 1984)

$$f_n = 2\eta \exp(-\eta^2), \quad \bar{\eta} = 0.$$

在线性海浪的数值模拟中, 模拟出的波面具有垂直对称性, 因此, 波面极大值和波面极小值分布的函数形式完全相同, 不发生如图8所示的偏离现象. 本文的偏态海浪过程的数值模拟方法能将此特性给以充分地显现出来. 图9就是我们模拟的海浪过程作极大(小)值统计分布拟合的结果, 其与图8是很相近的.

四、模拟方法的检验和比较

我们选用了1980—1981年我所在胶州湾内观测的14组具有不同波面偏度的海浪资料(见表

1), 就以“准相关传递法”和“线性叠加法”的模拟结果进行检验和比较.

将每次实测波浪记录作谱估计和波高统计分布, 算出波面偏度(K_3), 并将此波面偏度值代入式(18)得其波面高度分布. 以实测的波谱和波面高度分布按文中提出的“准相关传递法”进行偏态海浪过程的数值模拟, 同时按线性叠加法也进行海浪过程的数值模拟, 将其所模拟的结果做谱估计、波高和波面极大(小)值统计分布, 并用实测资料结果进行检验和比较. 图10—12作为检验和比较的示例.

由图10—12和选用14组资料的检验和比较结果表明: 二种模拟方法的模拟谱与实测谱符合都较好, 其模拟精度相当, 但准相关传递法模拟的海浪过程的波高分布和波面极大(小)值分布比线性叠加法所得的结果更接近实测的统计分布.

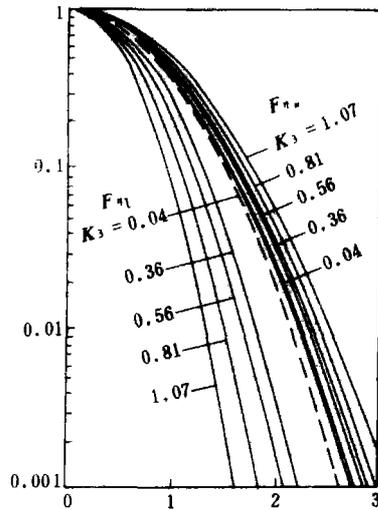


图9 波面偏度对波面极大(小)值影响的模拟拟合曲线

五、结 论

1. 文中对 Polge 等人提出的“相关传递法”作了进一步数学分析, 论证了其成立条件和适用范围. 考虑波面偏度对谱形的影响, 提出用“准相关传递法”来对偏态海浪过程进行数值模拟. 此法模拟出的海浪过程的波剖面高度分布严格满足给定的分布, 其谱形非常接近靶谱. 比前人的模拟方法更符合于实际的海浪过程.

2. 文中作了波面偏度与谱的相关性分析, 研究了波面偏度对谱的影响, 获得了波

表 1

资料编号	观测日期	观测时间	波面偏度	谱宽度 $\varepsilon^2 = 1 - \frac{m_0 m_4}{m_2^2}$
550	1980.10.11	17:00	0.237	0.713
768	1980.10.25	15:10	0.301	0.687
769	1980.10.25	16:00	0.414	0.721
545	1980.10.10	18:40	0.780	0.832
988	1981.1.14	21:00	0.756	0.640
989	1981.1.14	22:00	0.461	0.645
990	1981.1.14	23:00	0.374	0.626
994	1981.1.14	10:55	0.481	0.757
995	1981.1.15	22:00	0.779	0.691
10-97	1981.1.15	08:30	0.520	0.771
10-109	1981.3.24	15:30	0.302	0.772
14-139	1981.9.1	06:00	0.291	0.749
14-148	1981.9.1	16:00	0.982	0.827
15-160	1981.9.2	09:00	0.199	0.828

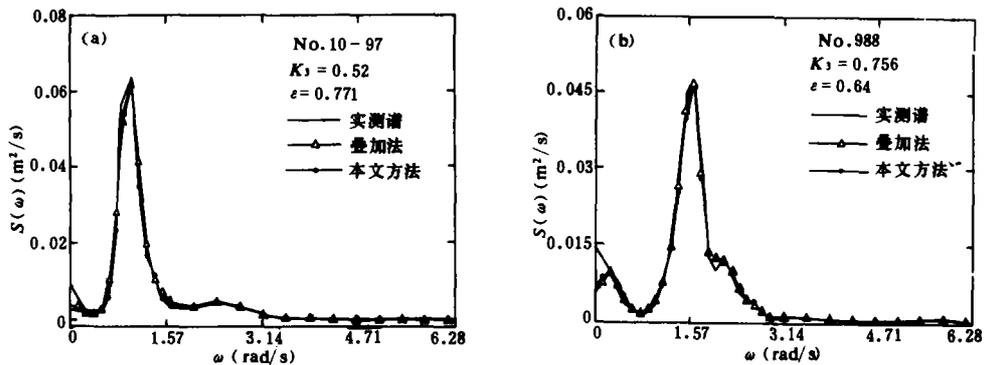


图10 模拟谱与实测(靶)谱的符合情况

面偏度与谱峰下降因子间的经验关系〔式(25)〕。

3. 目前不少作者从Weibull分布来拟合实测波高分布, 获得较好的结果。我们模拟研究波面偏度(K_3)对Weibull分布中参数 α 、 β 的影响, 得出: α 随 K_3 增大而减小, β 几乎不随 K_3 变化, 这是由于波的非线性效应所致。

4. 文中利用胶州湾1980—1981年观测的14组资料对准相关传递法的数值模拟方法进行检验, 将该法与线性叠加法加以比较, 结果表明, 就波剖面高度分布、波高分布和波面极值分布而言, 准相关传递法比线性叠加法更接近于实测资料。

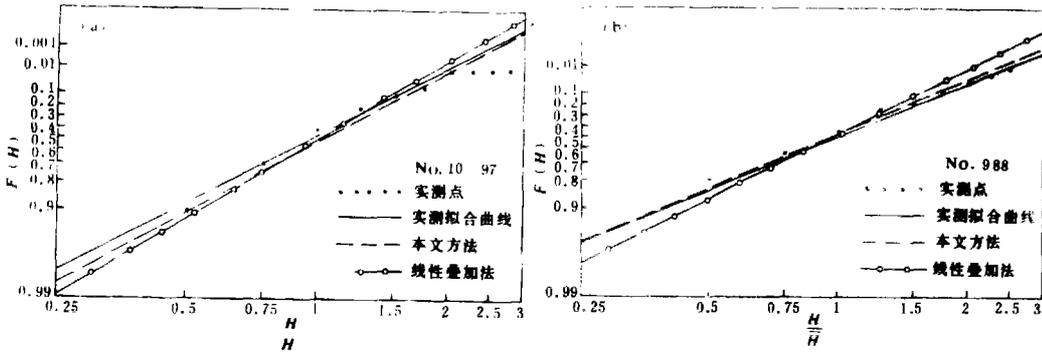


图11 实测与模拟的波高分布比较

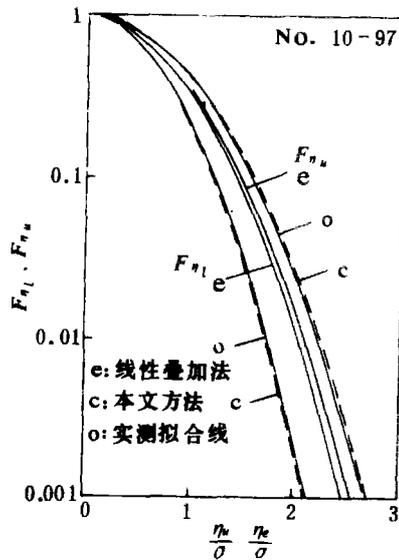


图12 模拟与实测的波面极大(小)值分布的比较

参 考 文 献

[1] Borgman, L.E., Ocean wave simulation for engineering design, *J. Waterway and Harbors Division, ASCE*, **95** (1969), WW 4: 557-583.

[2] 文圣常、余宙文, 海浪理论及计算原理, 科学出版社, 1984, 276-296.

[3] Goda, Y., Numerical experiments on wave statistics with spectra. simulation, *Report and Harbor Res. Inst.*, **9** (1970), 3: 3-57.

[4] Goda, Y., Numerical experiments on statistical variability of ocean wave, *Report of the Port and Harbor Res. Inst.*, **16** (1977), 2: 3-26.

[5] 合田良实, 波浪の统计性质に关する二、三の数值的检讨, *港湾技术研究所报告*, **24** (1985), 4: 65-102.

[6] 陈俊昌、王文质, 数值模拟波面的外观海浪谱, *热带海洋*, **1** (1982), 2: 132-138.

- [7] Longuet-Higgins, M. S., The effect nonlinearities on statistical distribution in the theory of sea waves, *J. Fluid Mech.*, 17(1963), 3: 459—480.
- [8] Huang, N. E. and S. R. Long, An experimental study of the surface elevation probability distribution and a statistics of wind-generated waves, *J. Fluid Mech.*, 101(1980), 179—200.
- [9] Tayfun, M. A., Narrow-band nonlinear sea wave, *J. Geophys. Res.*, 85(1980), 3: 1548—1552.
- [10] Ochi, M. K. and W. C. Wang, Non-Gaussian characteristics of coastal waves, *Proc. 19th Coastal Engineering Conference*, 1(1984), Chap. 35: 516—531.
- [11] Hudspeth, R. T. and M. C. Chen, Digital simulation of non-linear random waves, *J. Waterway Port, Coastal and Ocean Division, ASCE*, 105(1979), WW 1: 67—85.
- [12] Tick, L. J., A non-linear random model of gravity waves, *J. of Math. and Mech.*, 8(1959), 5: 643—651.
- [13] Polge, R. J. et al., Generation of a pseudo-random set with desired correlation and probability distribution, *Simulation*, 20(1973), 5: 153—158.
- [14] 陶笃纯, 噪声过程的计算机模拟, *声学学报*, 11(1986), 6: 367—372.
- [15] Gujar, U. G and R. J. Kavanagh, Generation of random signals with specified probability density function and power density spectra, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-13(1968), 716—719.
- [16] Wen Shengchang et al., Parameters in wind-wave frequency spectra and their bearing on spectrum forms and growth, *Acta Oceanologica Sinica*, 8(1989), 1: 15—40.
- [17] 俞章修, 海浪的数值模拟, *大连工学院学报*, 1981, 2: 84—90.
- [18] 王梓坤, 概率论基础及其应用, 1976, 253—261.
- [19] Tayfun, M. A., Nonlinear effects on the distribution of amplitudes of sea wave, *Ocean Engng.*, 11(1984), 3: 245—264.
- [20] Naess, A., On the distribution of crest to trough wave height, *Ocean Engng.*, 12(1985), 3: 221—234.