第13卷 第1期 海洋学报 Vol.13, No. 1
1991年1月 ACTA OCEANOLOGICA SINICA January, 1991

热带海洋和大气非线性波动及其正压稳定性

刘秦玉 秦曾灏
（青岛海洋大学物理海洋所）（上海台风研究所）

摘 要

本文利用常微分方程定性理论，研究了热带海洋、大气中非线性波动及其正压稳定性，得到了不同频率的非线性波动稳定性与大气、海洋中基本流动及其基本流动的水平切变之间的关系。

近年来，利用多尺度扰动法，研究非线性海洋、大气波动及其稳定性问题，已取得某些有意义的成果．但是，多尺度扰动方法较繁，且往往要在某些人为假定下才能得到近似解．刘式适等利用常微分方程定性理论研究了地球流体中的非线性波动，取得了一系列的研究成果[1,2]．伍荣生又利用长波近似理论研究大气中非线性罗斯贝波的波动特点[3]．这些方法都为研究非线性波动提供了新的方法和手段．

热带地球流体波动的罗斯贝数大，平流惯性项，科氏力和气压梯度力量级相同．尤其在急流中，非线性作用更显得重要．许多学者已提出应发展一个关于热带地区非线性波动的新理论，而且在这些方面也进行了一系列的探索[4,5]．

热带大气存在着偏东信风和赤道西风等基本气流，热带对流低层的扰动，台风的发生、发展与基本气流的切变有很大关系[6]．在海洋中，无论是大西洋、太平洋还是印度洋都有西向赤道表面流和东向赤道表面逆流[9,10]．这些基本流动都是非常典型的纬向流．根据大量的观测事实（例如，Taft 等1974年在太平洋上的观测，Duing 等1975年的观测）得知，无论是赤道表面流与赤道潜流都会产生正压不稳定和斜压不稳定．基本流的一般规律是[9,10]：

1．南北赤道流是西向的，其流速一般为25—30cms^{-1}（北赤道流），50—65cms^{-1}（南赤道流），而位于两者之间（4°—9°N）的赤道逆流是东向的，流速大约为35—60cms^{-1}；而在3—4月份流速减到小于20cms^{-1}．赤道逆流的宽度较小，大约150km．

2．赤道纬向流上的波动是混合罗斯贝重力波，西向传播的这种混合波基本上是低频波，具有罗斯贝波的一些基本特征．东向传播的这种混合波基本上是类似惯性重力波的快

本文于1988年8月15日收到，修改稿于1989年1月5日收到．

波．观测发现，东向波是十分稳定的，而西向波常发生不稳定．

根据李麦村等[7]对热带大气波动的研究，在南北方向上的运动尺度为无穷大时，罗斯贝波与惯性重力波是不可分的．因此，我们在本文中针对纬向流中的纬向非线性混合罗斯贝重力波的不同频率段，来讨论这种混合波的稳定性态．

一、波动的频数关系

β 平面正压有辐散流体的动力学方程组可表示为：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\beta y v=-\frac{\partial \phi}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\beta y u=-\frac{\partial \phi}{\partial y},\\
&\frac{\partial \phi}{\partial t}+u\frac{\partial \phi}{\partial x}+v\frac{\partial \phi}{\partial y}+\phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中，t 是时间，x、y 分别是东西与南北方向的空间坐标，u、v 分别是 x，y 方向流速分量，对大气来说，ϕ 为重力位势；对于海洋来说 $\phi=g(\eta-h)$，η 为海面起伏高度，h 为水深，因为对于大洋 $\eta \ll h$，故为统一起见，在此将 $\phi \approx gh$．

根据低纬流体运动的特点[6]，将热带纬向波动分为基本状态和扰动．

$$
\begin{aligned}
&u=\bar{u}(y)+\tilde{u}(x,t),\\
&v=\tilde{v}(x,t),\\
&\phi=\Phi(y)+\tilde{\phi}(x,t).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其中，$\beta y\bar{u}(y)=-\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$．　(3)

令 $\tilde{u}(x,t)=U(\theta)$；　$\tilde{v}(x,t)=V(\theta)$；

$\tilde{\phi}(x,t)=H(\theta)$

其中，$\theta=kx-\omega t$　(4)

将式（2），（3），（4）代入式（1）则有

$$
\begin{aligned}
&(\omega-k\bar{u}-kU)U'-kH'=\left(\frac{d\bar{u}}{dy}-\beta y\right)V,\\
&(\omega-k\bar{u}-kU)V'=\beta yU,\\
&(\omega-k\bar{u}-kU)H'=-\beta y\bar{u}V+ghkU'.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中，$(\ )'=\dfrac{d}{d\theta}(\ )$．

消去式（5）中的 H'，则有

$$\left.\begin{aligned} U' &= \frac{\left(\frac{d\bar{u}}{dy} - \beta y\right) V(\omega - k\bar{u} - kU) - \beta y \bar{u} V k}{(\omega - k\bar{u} - kU)^2 - g_h k^2} = F\ (U, v, y) \\ V' &= \frac{\beta y U}{(\omega - k\bar{u} - kU,)} = G\ (U, V, y) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

方程（6）的平衡点为$U=0, V=0$. 当波数与频率同时满足$\omega \neq k\bar{u} + kU$和$(\omega - k\bar{u} - kU)^2 \neq ghk^2$时，方程(6)右端的函数$F(U, V, y)$, $G\ (U, V, y)$可以在平衡点（0，0）处展开为台劳级数：

$$\begin{aligned} F\ (U, V, y) &= a_1 U + a_2 V + a_3 U^2 + a_4 UV + a_5 V^2 + \cdots. \\ G\ (U, V, y) &= b_1 U + b_2 V + b_3 U^2 + b_4 UV + b_5 V^2 + \cdots. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{其中，} a_1 = 0\ ;\ a_2 = \frac{-\delta\ (\omega - k\bar{u}) - \beta y \bar{u} k}{(\omega - k\bar{u})^2 - ghk^2}\ ; \\ &a_3 = 0\ ;\ a_4 = \frac{-k\delta\ [(\omega - k\bar{u})^2 - ghk^2] - 2k^2 \beta y \bar{u}\ (\omega\ \ k\bar{u})}{[(\omega - k\bar{u})^2 - ghk^2]^2}\ ; \\ &a_5 = 0\ ;\ b_1 = \frac{\beta y}{\omega - k\bar{u}}\ ;\ b_2 = 0\ ;\ b_3 = -\frac{\beta y k}{(\omega - k\bar{u})^2}\ ; \\ &b_4 = 0\ ;\ b_5 = 0\ . \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$\delta = \frac{d\bar{u}}{dy} - \beta y$，若在平衡点附近研究波动方程（6）解的性质，则可先研究其一级近似方程

$$\left.\begin{aligned} U' &= a_2 V \\ V' &= b_1 U \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

方程（9）实际上是线性常微分方程组，其中包含了基流与纬向波的相互作用．波动方程（10）是非线性常微分方程，其中，不仅包含基流与纬向波的相互作用，也包含波与波的非线性相互作用．

下面讨论波的频散关系：

由式（9）可得相路方程

$$\frac{dU}{dr} = \frac{a_2}{b_1} \frac{V}{U}, \quad (10)$$

相路

$$b_1 U^2 - a_2 V^2 = D \qquad (D\text{为积分常数}). \quad (11)$$

若$a_2/b_1 < 0$，则相路为绕平衡点的椭圆；若$a_2/b_1 > 0$，则相路是以平衡点为中心的双曲线．$a_2 b_1 < 0$ 的条件下，方程（9）才有波动解．若令$a_2 b_1 = -1$，得到频散关系：

$$\beta y [\delta(\omega - k\bar{u}) + \beta y \bar{u} k] = (\omega - k\bar{u})\ [(\omega - k\bar{u})^2 - ghk^2]$$

解此三次方程，可得到频率ω 与波数k，以及β，y，δ 的关系式．

由此可见，基流与纬向波的相互作用，没有从本质上改变波的频散特性，频率仍然与波动的振幅无关。但基流的水平切变可以改变频率的大小。

对于非线性波动方程（6），若将式（11）代入式（6）并忽略U，V的三次项，则有：

$$U'' = b_1(y)a_2(y)U + (b_3(y)a_2(y) + 2a_4b_1)U^2 + Da_4, \tag{12}$$

进一步可得到k－dV方程：

$$U''' = b_1(y)a_2(y)U' + 2(b_3a_2 + 2a_4b_1)UU'. \tag{13}$$

众所周知，k－dV方程（13）在三次方程$P(U)=0$有三个分立单实极$U_1>0$；$U_2<0$；$U_3<U_2<0$的条件下，为有界的周期解。

$$U(\theta) = U_2 + (U_1 - U_2)Cn^2\left(\sqrt{\frac{R}{6}(U_1 - U_3)}\,\theta\right). \tag{14}$$

其中，$P(U) = U^3 + \frac{3b_1(y)a_2(y)}{2R(y)}U^2 - \frac{3E}{R(y)}U + F$，

$$R(y) = -b_3(y)a_2(y) - 2a_4(y)b_1(y),$$

且有：

$$U_1 + U_2 + U_3 = -\frac{3a_2(y)b_1(y)}{2R(y)}. \tag{15}$$

式（15）表明，包含波动非线性相互作用的热带流体波动频率不仅与基流$u(y)$、波数k，β、y，δ等因子有关，而且与波动振幅$U(\theta)$有关。这正是非线性波动与线性波动的本质区别。

研究基本气流与扰动气流相互作用固然是重要的，但是波与波的非线性作用使波动频率性质发生了改变也不可忽视。

二、波动的稳定性

由于在讨论上述热带流体波动时，并没有引入y方向边界条件，认为扰动在y方向基本上无变化，是具有较大经向尺度的热带运动，因此，这类波动是罗斯贝－重力混合波。它们不能被单独地分开[7]。

为了便于讨论各种频率波动的稳定性，采用以下的分类：

1．“快波”，被定义为时间尺度远小于平流时间的波动。$|\omega| \gg |k\bar{u}|$。

方程（9）的特征方程是$\lambda^2 + B = 0$，其中，

$$B = \frac{\left(\frac{d\bar{u}}{dy} - \beta y\right)\beta y}{\omega^2 - ghk^2}. \tag{16}$$

令$\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)c = \beta y$，除了赤道$y=0$处方程（9）的解为常数外，则波动解在平衡点具有如表1的稳定性态。

表 1　"快"波平衡点的稳定性态

$\frac{d\bar{u}}{dy}$	ω	B	平衡点的稳定性态
$\frac{d\bar{u}}{dy}<\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_c$	$\omega^2>ghk^2$	$B<0$	不稳定鞍点
$\frac{d\bar{u}}{dy}>\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_c$	$\omega^2<ghk^2$	$B<0$	不稳定鞍点
$\frac{d\bar{u}}{dy}>\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_c$	$\omega^2>ghk^2$	$B>0$	中心
$\frac{d\bar{u}}{dy}<\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_c$	$\omega^2<ghk^2$	$B>0$	中心

从表 1 可见，对于热带流体波速远大于基流流速的"快"波，由于基流及其切变的不同，使其稳定性有以下的特点：

（1）存在一个基流水平切变临界值$\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_c$ 此值为波动稳定性的分岔值，且随纬度的不同而不同，在赤道上$\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_c=0$，在一固定纬圈上，基流经向切变值在$\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_c$附近有微小变动时，"快"波会从稳定变为不稳定。

（2）基流经向水平切变越小，越利于高频波的不稳定，尤其在$\frac{d\bar{u}}{dy}<0$时，赤道以北的高于重力外波频率的高频波，总是不稳定的。

（3）基流经向切变越大，越利于频率低于重力外波频率的波的不稳定。

（4）以重力外波波速为界，不同波速的波动的稳定性对基流水平切变的要求正好相反。

2．"慢"波，被定义为时间尺度接近于平流时间的波动。

此时方程（9）的特征方程$\lambda^2+B=0$中，

$$B=-\frac{\beta y\left[\frac{d\bar{u}}{dy}(\omega-k\bar{u})-\beta y(\omega-2k\bar{u})\right]}{ghk^2(\omega-k\bar{u})}, \tag{17}$$

令$\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_d=\beta y\frac{\omega-2k\bar{u}}{\omega-k\bar{u}}$，

除去赤道（$y=0$），方程（9）的解为定常解外，其余地区"慢"波在平衡点的稳定性态如表 2 所示。

从表 2 可见，对于波速接近基本气流流速的"慢"波的稳定性，有以下几个特点：

（1）存在着基流经向水平切变的一个临界值$\left(\frac{du}{dy}\right)_d$，此值在赤道上为零，当基流经向水平切变值在此临界值附近有微小变化时，波的稳定性会发生变化。

表 2　“慢”波平衡点的稳定性态

$\frac{du}{dy}$	ω	B	平衡点的稳定性态
$\frac{du}{dy} > \left(\frac{du}{dy}\right)_d$	$\omega \quad ku$	$B \quad 0$	不稳定鞍点
$\frac{du}{dy} \quad \left(\frac{du}{dy}\right)_d$	$\omega \quad ku$	$B \quad 0$	不稳定鞍点
$\frac{du}{dy} \quad \left(\frac{du}{dy}\right)_d$	$\omega \quad ku$	$B \quad 0$	中心
$\frac{du}{dy} \quad \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_d$	$\omega \quad k\bar{u}$	$B \quad 0$	中心

（2）当 $\bar{u}$　0 时，向东传播的“慢”波，容易在切变较临界值大的区域内产生不稳定；向西传播的波，若波速大于基流流速时，容易在切变较临界值小的区域内产生不稳定。

（3）当 $\bar{u} > 0$ 时，向东传播的波速大于基流流速的“慢”波，容易在经向切变较临界值大处产生不稳定；波速小于基流流速的“慢”波，容易在切变值较临界值小处产生不稳定；尤其是特别慢（几乎是静止）的波，$\left(\frac{du}{dy}\right)_d \approx 2\beta y$．只要 $\frac{d\bar{u}}{dy}$　$2\beta y$ 就会产生不稳定．而对于向东传播，波速大于基流流速而小于二倍基流流速的波，临界切变率为负值．对于西向传播的波，只要切变值小于临界值，就会产生不稳定．

以上“快”，“慢”波动的稳定性，仍然是考虑到基流与波相互作用的线性稳定性，不稳定能量的来源于基流．

下面讨论，不仅包含基流与纬向波的相互作用，且包含纬向波与波之间相互作用的非线性方程（6）的平衡点的稳定性态．

方程（9）是方程（6）的线性近似方程．根据常微分方程稳定性理论[8]．方程(9)的平衡点不是中心点时，方程（6）在平衡点附近的稳定性与方程（9）的稳定性完全一致．因此，对于上述的“快”波和“慢”波，当方程（9）的平衡点是不稳定点的条件得到满足时，方程（6）的波解也是不稳定的．

$$
\begin{aligned}
&F(U \quad V) \quad F(U, V)\\
&G(U, \quad V) \quad G(U, V)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

因为方程（6）右端的函数满足对称定理和管形中心定理[1]．因此，在方程（9）的平衡点为中心时，非线性方程（6）的平衡点也是中心．所以，考虑了波与波之间的非线性相互作用后，不改变热带地球流体波动的正压稳定性．

三、热带海洋与大气中的非线性波动的稳定性

现在，应用以上结论，解释热带大气、海洋波动正压稳定性．

在热带大气中，存在着偏东信风与赤道西风相邻的赤道辐合带区，此处$\frac{d\bar{u}}{dy}<0$，故向西传播的“慢”波（只要$c<\bar{u}$）和向东西两个方向传播的“快”波（只要$|c|>\sqrt{gh}$）都是不稳定的．因此，西太平洋上绝大多数的台风，是在这一风速不连续突变面上发生和发展起来的．文献〔6〕中的结论也指出，东、西界面上扰动总是不稳定的．而东风带中，由于$\bar{u}<0$，自西向东传播的“慢”波容易在东风带北侧切变较大的区域产生正压不稳定，此结论与中高纬度罗斯贝波的正压不稳定结论相一致．

可以用上述结论来解释热带海洋中某些观测事实．Philander指出[9]，波长2 000km，周期与e折时间为2—3周的西向波是增幅波．这种波波速为$-160\,\mathrm{cms^{-1}}$—$-100\,\mathrm{cms^{-1}}$，是与基流同量级的“慢”波，一般说来$|c|<2|\bar{u}|$是成立的．而对于4°N来说，此波稳定性的正临界值为$\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_d\approx10^{-5}\mathrm{s^{-1}}$，而北赤道表面流的径向切变绝对值一般小于$0.2\times10^{-5}\mathrm{s^{-1}}$，故对于这种西向波满足条件$\omega<k\bar{u}$，$\frac{d\bar{u}}{dy}<\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_d$，因此赤道表面流上的这种西向波常常是不稳定的，这与观测事实相符．而东向传播的罗斯贝－重力混合波，基本上是“快”波．例如波长为3 000km，周期为5d，深度为200m的“快”波，$\sqrt{gh}\approx4.4\mathrm{ms^{-1}}$，而$c\approx7\mathrm{ms^{-1}}$，故$\omega^2>ghk^2$，而4°N以南的赤道逆流地区，$\beta y$几乎为零．因此，只要$\frac{d\bar{u}}{dy}>\beta y$，东传的“快”波总是稳定的．观测事实也指出，一般情况下东传波是稳定的[9]．

五、结　　论

热带赤道β平面近似下非线性波动具有以下几个特点：

1．非线性波与波的相互作用使非线性波动频率与波动振幅有关，改变频散关系．

2．基流与波相互作用不会改变波的频散性质，但能影响频率的大小．其在热带大气，海洋波动稳定性方面起决定性作用．

3．同样频率波动的稳定性，依赖于基流的水平切变值与切变临界值的相对大小．“慢”波所对应的基流切变临界值不仅取决于β效应和纬度，还取决于波速与基流流速．“快”波所对应的基流切变临界值仅取决于β效应和纬度．

4．热带大气赤道幅合带是西向传播的“慢”波与东，西向传播的“快”波的不稳定区域．

5．热带海洋赤道表面流上西向传播的“慢”波总是不稳定的，东向传播的“快”波

通常是稳定的.

6. 如果热带大气、海洋中波动是稳定的，则它们通常具有明显的周期性.

参 考 文 献

[1] 刘式适、刘适达、地球流体中的非线性波动，中国科学，B辑，1983，3：279—289.

[2] 刘式适，刘式达，卜玉康，层结切变流体非线性惯性重力内波的稳定性，气象学报，42（1984），1：24—33.

[3] 伍荣生，长波近似与大气中的线性、非线性波，中国科学，B辑，1985，12：1149—1158.

[4] 李麦村，姚隶荣，基本气流的纬向切变与热带大气波动，科学通报，1981，7：416—419.

[5] 李麦村，薛纪善，热带大气运动的Rossby孤波，气象学报，42（1984），3：259—268.

[6] 杨大升，刘式适，热带东、西风界面附近的扰动流场，气象学报，37（1979），3：1—12.

[7] 李麦村、姚隶荣，热带大气运动的长波和超长波，大气科学，5（1981），2：113—122.

[8] 张锦炎，常微分方程几何理论与分支问题，1981，北京大学出版社.

[9] Philander, S. G. H., Instabilities of zonal equatorial currents, *J, G, R*, **81**(1976), 21: 3725—3734.

[10] Philander, S. G. H., Equatorial waves in the presence of the equatorial undercurrent, *J, P, O*, **9** (1979), 254—262.

[11] 廖可人，常微分方程组的管形中心定理，数学学报，1985，2：174—182.