

非线性波 - 波相互作用的特征

李 陆 平

(国家海洋局第一海洋研究所, 青岛)

在波浪研究中,非线性能量传输 S_{nl} 的概念虽早在60年代提出,但其重要性直至JONSWAP研究成果发表以后才得到证实.某些特征谱的非线性能量传输的数值计算结果,定性地描述了非线性能量传输 S_{nl} 的主要特征:(1)由给定谱可得到非线性能量传输 S_{nl} 的理论值.(2)非线性能量传输 S_{nl} 有三个耳,两侧为正耳,中间为负耳;对充分成长的PM谱,低频正耳位于峰频率,对成长的JONSWAP谱,低频正耳位于峰频率左侧.(3)高频正耳较其它二个耳有较宽的方向分布.(4)低频正耳集中在窄的频带内,有比较窄的方向分布.(5)相互作用发生在波数空间的一个比较短的范围,最强的能量传输速率相当靠近谱峰,尤其窄峰谱是如此.越来越多的研究者认为,非线性能量传输 S_{nl} 的上述特征对解释谱的能量平衡方程、风浪生成机制以及谱形特征都是应加以考虑的因素^[1].

由于Hasselmann^[2]提出的以Boltzmann积分表示的波-波间非线性能量传输 S_{nl} 的精确计算(即Boltzmann积分的计算)太费机时,使之不能对各种谱进行系统的非线性能量传输的计算,不能发展和检验用于波浪模式中精确表达式的适当的参量化计算方法.因此,现今许多研究者致力于研究非线性波-波相互作用的数值计算,探讨能与精确计算相吻合,节省机时,且能应用于离散化的波浪模式中的参量化模式,将其应用于波浪数值预报中或研究非线性波-波相互作用的特征.

Hasselmann等^[2]在非线性波-波相互作用精确计算的研究中,采用对称处理,即非线性能量传输相对于参加共振相互作用的4个波分量是对称的,提出了一个有效地计算波浪谱中非线性能量传输 S_{nl} 的新方法,使之可以进行大量的非线性能量传输 S_{nl} 的计算,系统地研究谱的能量平衡和发展参量化模式,并提出了有限深水情况下,非线性能量传输 S_{nl} 的一些新结果.Hasselmann等^[3]在对4种不同的非线性波-波相互作用的参量化计算方法进行研究之后,认为离散相互作用算子的近似方法是计算非线性波-波相互作用最好的方法,它与精确计算吻合良好,能够代替精确计算或将其应用于波浪模式中.采用离散相互作用算子的近似方法计算非线性能量传输 S_{nl} 的速度比精确计算快得多,这就有可能通过各种谱作更多的非线性波-波相互作用的计算,来研究谱的能量平衡方程.

离散相互作用算子的近似方法,在有限风区风浪成长情况下(Hasselmann^[2]等)和波浪谱对旋转风的响应情况下(Young^[4]等)的检验结果表明,精确计算和离散相互作用算子近似之间取得良好一致.本文的目的是检验无限风区深水波浪成长情况下,离散相互作用算子近似法与精确计算的吻合程度;研究非线性波-波相互作用和谱参数对 λ 值和

相互作用强度系数 c 的敏感程度, 提出了一些新的计算结果.

一、离散相互作用算子近似法的描述

离散相互作用算子近似法跟窄峰近似法 (the narrow peak approximation) 和局部相互作用近似法 (the local interaction approximation) 一样, 基于对称处理, 即非线性能量传输 S_{nl} 对参加共振的 4 个相互作用的波数分量是对称的. 在 Hasselmann 等的描述中, 非线性相互作用算子是由少量的离散相互作用图叠加构成的, 而这些相互作用图的每一个都是由邻近的、有限距离的参加共振相互作用的 4 个波分量组成. 在每一个相互作用图中, 有 2 个波数分量是一样的, 即 $k_1 = k_2 = k$; 波数 k_3 ($k_3 = (1 + \lambda)^2 k$) 和 k_4 ($k_4 = (1 - \lambda)^2 k$) 大小不同, 按共振条件要求, 与波数 k 成一定角度. 第二个相互作用图是通过第一个相互作用图中 k_3 和 k_4 相对 k 轴反射得到的. 参考波数 k 的尺度和方向在波数空间连续改变.

在进行数值计算时, 通常离散相互作用需转换成能谱密度 F 相对于频率 f 和传播方向 φ 的变化, 即对相互作用位相空间变量使用 f 和 φ , 而不使用 k . 借助这些变量, 可以得到 3 个相互作用波数 (频率和方向) 源函数 $S_{nl}(f, \varphi)$ 的增量.

$$\left. \begin{aligned} \delta S_{nl} &= -2 \frac{\Delta f \Delta \varphi}{\Delta f \Delta \varphi} \\ \delta S^+_{nl} &= (1 + \lambda) \frac{\Delta f \Delta \varphi}{\Delta f^+ \Delta \varphi} \\ \delta S^-_{nl} &= (1 - \lambda) \frac{\Delta f \Delta \varphi}{\Delta f^- \Delta \varphi} \end{aligned} \right\} c g^{-4} f^{11} \left[F^2 \left(\frac{F_+}{(1 + \lambda)^4} + \frac{F_-}{(1 - \lambda)^4} \right) - 2 \frac{F F_+ F_-}{(1 - \lambda^2)^4} \right],$$

其中 δS_{nl} 是源函数 $S_{nl}(f, \varphi)$ 的增量, c 是数值常数, 表示相互作用的强度; $\Delta f, \Delta f^+, \Delta f^-$ 分别表示在频率 f, f^+, f^- 处谱和源函数的离散分辨率. F 是能谱密度; 分子上的 $\Delta f \Delta \varphi$, 是离散相互作用位相空间元素, 而分母的微分是带的大小, 在这个带内, 由于离散相互作用引起的谱变化的增量被叠加在一起.

上述方程对所有频率、方向和相互作用图求合, 以得到净的源函数 $S_{nl}(f, \varphi)$.

在局部相互作用近似中, 起主要作用的相互作用区域位于中心点附近; 在窄峰近似中, 起主要相互作用的区域位于谱峰附近. Hasselmann 等经过大量试验发现, 在离散相互作用算子近似中, 起主要作用的相互作用区域位于一个中间区域内, 在这个中间区域里, 所有波分量都位于波数 k 周围的圆环 $|k_i - k| < |k|/2$ 或 $|k_i - k| > |k|/4$ 之内. 此区域可用一个中间区域的相互作用图的镜像对来表示. 这意味着, 在这一相互作用位相空间的中间区域, 离散相互作用算子近似的计算结果和精确计算可以取得良好的一致, 而此区域之外的波数分量对相互作用的贡献很少.

用来计算非线性波-波相互作用的程序是 G. Ph. Uau Uledder 基于 S. D. Hasselmann 的程序提出的. 本文在计算时做了修改, 使其方向分辨率从 30° 变到 10° , 并使之有可能改变 λ 值和 c 值. 所有结果都是用方向增量为 10° 计算的.

二、精确计算和离散相互作用算子近似之间的比较

离散相互作用算子近似的参量化方法是否可用来代替精确的 Boltzmann 积分, 是通过把它们结合到同一个海浪模式中, 证明在标准情况下, 用它们分别计算出的谱参量成长曲线是否一致来检验的。

本文用二个给定的初始 JONSWAP 谱, 用含有非线性波-波相互作用的海浪模式, 来检验无限风区深水海浪成长情况下, 离散相互作用算子近似的参量化方法。第一种情况, 风速 $U = 10 \text{ m/s}$, 初始 JONSWAP 谱参数为: $a = 0.018$, $f_p = 0.4$ (谱峰频率), $\gamma = 3.3$; 第二种情况, 风速 $U = 20 \text{ m/s}$, $a = 0.018$, $f_p = 0.2$, $\gamma = 3.3$ 。

在所用的海浪模式中, 风输入的源函数项的计算由 Snyder^[6] 给出:

$$S_{in}(f, \varphi) = \max\{0, 0.25 \frac{\rho_r}{\rho_w} \left(\frac{28 U_*}{C_{ws}} \cdot \cos\theta - 1 \right) \cdot \omega \cdot F(f, \varphi)\},$$

其中, θ 表示波分量和风向之间的交角, ω 为圆频率, U_* 为摩擦风速, ρ_A 和 ρ_w 分别为空气密度和水的密度, C_{ws} 为波速。

耗散源函数项的计算由 Hasselmann^[5] 给出:

$$S_{dis}(f, \varphi) = -C_{dis} \bar{\omega} (\omega/\bar{\omega})^2 a^2 \cdot F(f, \varphi),$$

其中 C_{dis} 为系数, $a = \epsilon \bar{\omega}^4 / g^2$, $\bar{\omega} = \epsilon^{-1} \int F(f, \varphi) \omega df d\varphi$, $\tilde{\epsilon} = \iint F(f, \varphi) df + d\varphi F(f, \varphi)$ 为能谱密度。

对上述二种情况, 用离散相互作用算子近似参量化方法和精确计算得出的无因次总能量 $\tilde{\epsilon} = \epsilon g^2 / U^4$ 和无因次谱峰频率 $\tilde{f}_p = f_p U / g$ 的成长曲线的比较如图 1 和 2 所示。其中无因次时间为 $\tilde{t} = tg / U$, λ 取 0.25, 相互作用强度系数 c 取 0.3×10^4 。

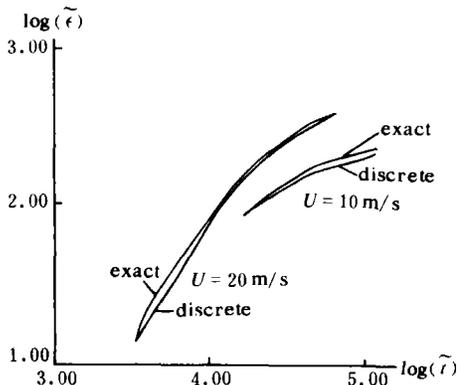


图 1 离散相互作用算子近似法与精确计算得出的无因次总能量的比较

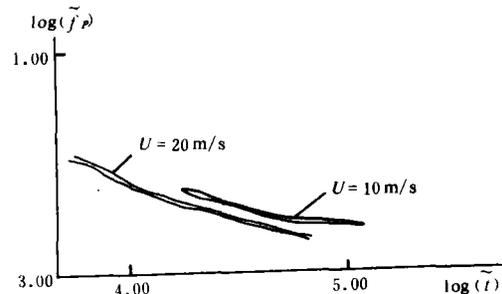


图 2 离散相互作用算子近似法与精确计算得出的无因次谱峰频率的比较

图中精确 Boltzmann 积分计算出的结果是由 G·Ph·Uan Uledder 提供的。比较表明, 由离散相互作用算子近似和精确计算得出的谱参量成长曲线吻合良好。

计算表明, 由离散相互作用算子近似计算出的谱参量成长曲线与精确计算的吻合程度,

取决于 λ 值的选取。为得到最佳吻合时的 λ 值,将精确计算结果和取不同 λ 值由离散相互作用算子近似得出的结果之差的平方和的平均值: $\alpha = \sum_N (\log f_{\text{exact}} - \log f_{\text{disc}})^2 / N$ 和 $\beta = \sum_N (\log \tilde{f}_{\text{exact}} - \log \tilde{f}_{\text{disc}})^2 / N$,做为吻合程度的指标。计算结果见表1。表中结果说明,

表 1

λ		0.24	0.25	0.26	0.30	0.35	0.40	0.45
风速 10m/s	α	0.0114	0.0107	0.0103	0.0137	0.0156	0.0155	0.0866
	β	0.00148	0.00154	0.00158	0.00281	0.00357	0.00769	0.00287
风速 20m/s	α	0.0543	0.0503	0.0458	0.0343	0.0268	0.0166	0.0237
	β	0.00518	0.00519	0.00449	0.00367	0.00355	0.00188	0.00273

无限风区深水海浪成长情况下,无因次谱峰频率的吻合程度比无因次总能量的吻合程度高一个数量级,故以无因次总能量的吻合程度作为离散相互作用算子近似和精确计算吻合程度的指标。在风速为10m/s时, $\lambda = 0.26$ 时,达到最佳吻合;风速为20m/s时, $\lambda = 0.4$ 时达到最佳吻合。上述结果表明,最佳吻合的 λ 值取决于风速,但由于精确Boltzmann积分耗费大量机时,难以获得不同风速下精确计算谱参数的成长曲线,故难以估计其最佳的 λ 吻合值。由于谱形式对非线性相互作用的影响,谱形的改变必然影响其最佳吻合的 λ 值,所以目前不可能提出对实际应用有意义的 λ 最佳值和风速的相关图。

但Hasselmann等在有限风区风浪成长的研究中,提出 $\lambda = 0.25$ 时,离散相互作用算子近似和精确计算达到最佳吻合。

三、非线性波-波相互作用的特征

由给定的JONSWAP谱,其谱参数为: $\alpha = 0.018$, $f_p = 0.11$, $r = 3.3$, $\sigma_a = 0.07$, $\sigma_b = 0.09$,如图3所示,用离散相互作用算子近似,取不同 λ 值,作出的无限风区深水非线性波-波相互作用源函数由图4、图5绘出。在源函数增量的方程中,表示相互作用强度的系数 c 取 0.3×10^4 。

在图4中, λ 值分别取为0.15、0.25、0.35。由图看出,非线性波-波相互作用源函数项的3个耳随 λ 值的增加,耳的宽度增加,并从低频推向高频;负耳和正耳的峰值也随之增加。由图5知, λ 值取为0.24、0.25、0.26时,3个耳的分布大体一致,但值得注意的是,低频正耳的峰值,在 $\lambda = 0.25$ 时较 $\lambda = 0.24$ 时有显著增加,其比值为1.23。在 $\lambda = 0.25$ 和 $\lambda = 0.26$ 时,低频正耳的峰值高度基本一致。由于低频正耳的峰值高度和耳的宽度将影响谱的形状,所以低频正耳的峰值高度和耳的宽度反映了非线性波-波相互作用的敏感性。由此可以得出这样的结论:在特定 λ 值,非线性波-波相互作用对 λ 值的选取是比较敏感的。

图6绘出了参加共振波-波相互作用的波数矢量图。

谱参数对非线性波-波相互作用敏感性的计算以下式表示:

$$\sum_N \left(\frac{\text{谱参数的相对变化}}{\lambda \text{值的相对变化(或相互作用强度系数 } c \text{值的相对变化)}} \right) / N.$$

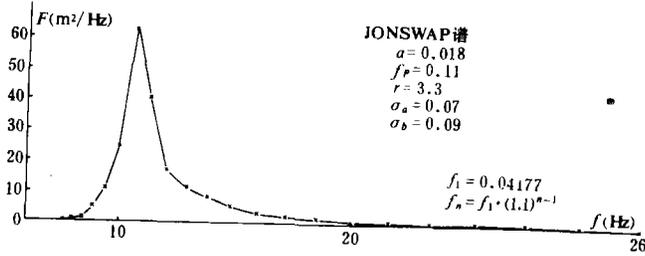


图3 JONSWAP 谱

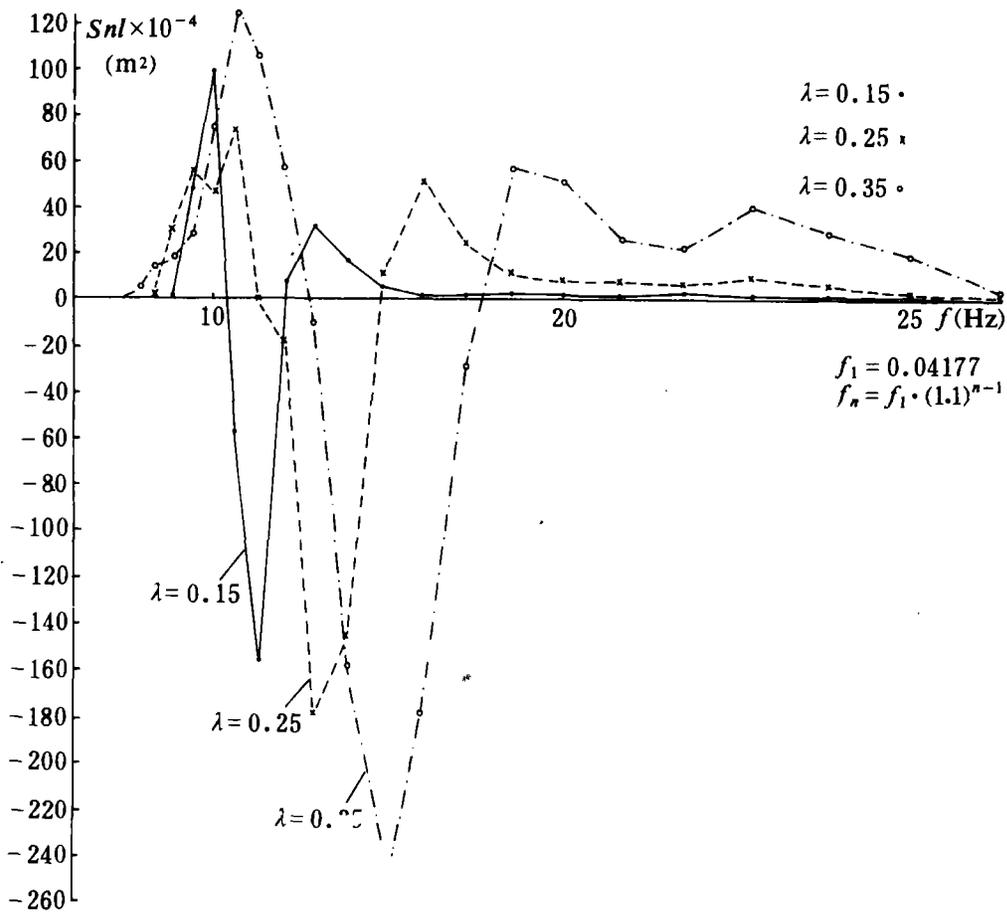


图4 非线性波 - 波相互作用源函数

若此值远大于 1，表示谱参数相对非线性波 - 波相互作用敏感；若此值远小于 1，则表示谱参数相对非线性波 - 波相互作用不敏感，计算结果见表 2 和 3。

表 2 谱参数相对 λ 值的敏感程度

$\lambda_1 = 0.25$ $\lambda_2 = 0.24$ $c = 3\ 000$	a	γ	ϵ	f_p	S_p	f_M
	-0.632	3.312	0.319	0.056	1.089	-0.300

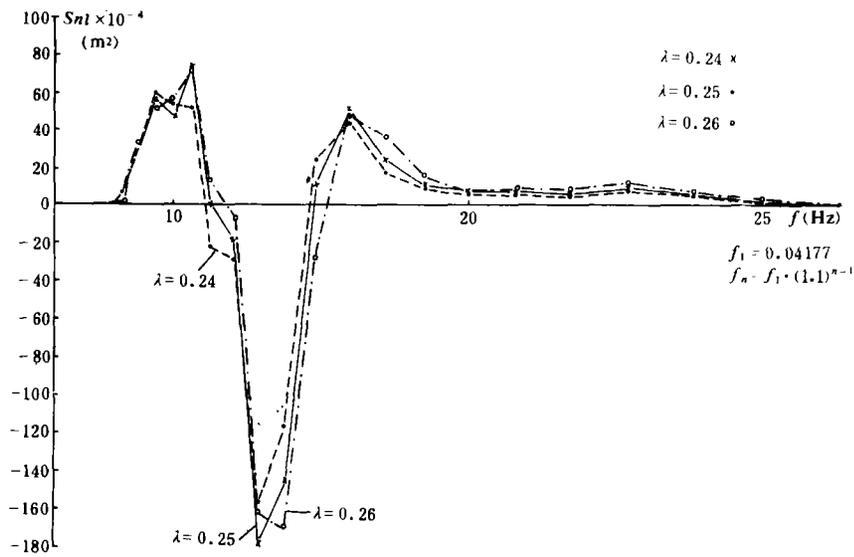


图5 非线性波-波相互作用源函数

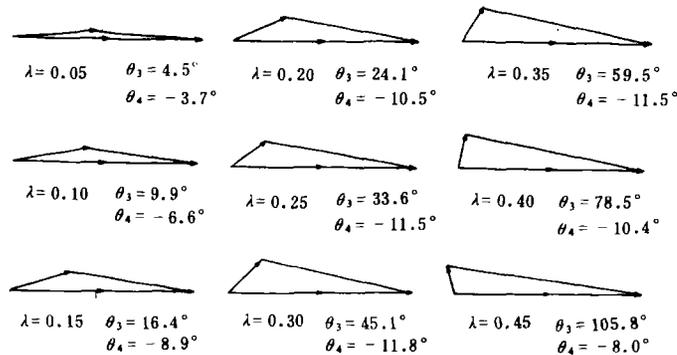


图6 离散相互作用算子近似法中用的相互作用形状

表3 谱参数相对 c 值的敏感程度

$\lambda = 0.25$ $c_1 = 3000$ $c_2 = 2880$	a	r	ϵ	f_p	S_p	f_M
	-0.304	0.101	0.101	-0.120	0.16	-0.139

其中 S_p 表示波散, f_M 表示平均频率. 由表 2 知, 当 λ 值改变 5% 时, r (谱升高因子) 值的相对变化与 λ 值相对变化之比高达 3.312, 这说明谱参数 r 值相对非线性波-波相互作用敏感, 但其它谱参数相对 λ 值不敏感. 由表 3 知, 当 $\lambda = 0.25$ 时, 谱参数 (包括 r 值) 对相互作用强度系数 c 值不敏感.

值得注意的是, 表中的结果取决于谱的选取, 对选用其它谱形的情况本文没做研究, 难以估计此结果是否具有普遍性.

四、小 结

以上的计算结果表明:

1. 在无限风区深水海浪成长情况下, 离散相互作用算子近似也能用于代替精确 Boltzmann 积分的计算, 但不同风速, 最佳吻合依赖于 λ 值. 在风速为 20m/s 时, $\lambda = 0.4$ 达到最佳吻合; 风速为 10m/s 时, $\lambda = 0.26$ 达到最佳吻合.

2. 随 λ 值的增加, 非线性波-波相互作用源函数项 3 个耳的宽度增加, 其峰频率从低频向高频推移; 负耳和低频正耳的峰值也随 λ 值的增加而增加.

3. 低频正耳的宽度和峰值高度是影响谱形的重要因素. 在特定 λ 值时, 低频正耳的峰值相对 λ 值敏感. 例如, 当 λ 值分别取 0.25 和 0.24 时, 低频正耳峰值之比为 1.23, 即对特定 λ 值, 非线性波-波相互作用对 λ 值敏感.

4. 对特定 λ 值, 谱参数 r (谱峰升高因子) 相对 λ 值敏感. 当 λ 值分别取 0.25 和 0.24 时, r 值的相对变化与 λ 值相对变化之比为 3.312. 其它谱参数相对 λ 值不敏感; 谱参数对相互作用强度系数 c 不敏感.

由于精确 Boltzmann 积分的困难和非线性波-波相互作用取决于谱形式, 本文难以完成对其它风速或谱形式的计算. 这里提出的结果虽具有局限性, 但足以说明非线性波-波相互作用的某些特征, 这对于深入了解非线性波-波相互作用的特征和理解在海浪数值预报中应用非线性波-波相互作用这一项的困难是有意义的.

荷兰德尔夫特工业大学 H. L. Tolmann 和 L. H. Holthuijsen 博士对本文给予了热情的指导和帮助, 并对这项工作提供方便, 在此深表感谢.

参 考 文 献

- [1] Hasselmann, K., On the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum—Part 1: General theory, *J. Fluid Mech.*, **12** (1962), 4: 481—500.
- [2] Hasselmann, S. and K. Hasselmann, Computations and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum—Part 1: A new method for efficient computations of the exact nonlinear transfer integral, *J. Phys. Oceanogr.*, 1985.
- [3] Hasselmann, K. and S. Hasselmann, J. H. Allender and T. P. Barnett, Computations and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum—Part 2: Parameterizations of the nonlinear energy transfer for application in wave models, *J. Phys. Oceanogr.*, 1985.
- [4] Young, I. R., S. Hasselmann and K. Hasselmann, *Computations of the Response of a Wave Spectrum to a Sudden Change in the Wind Direction*, Hamburger Geophys. Einzelschriften, 1985.
- [5] Hasselmann, K., On the spectral dissipation of ocean waves due to white capping, *Boundary-layer Met.*, **6** (1974), 107—127.
- [6] Snyder, R. L., F. W. Dobson, J. A. Elliot and R. B. Long, Array measurements of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **102** (1981), 1—59.