

# Hilbert 变换在波群统计中的应用\*

## I. 波群群高

赵 锰 徐德伦 楼顺里

(青岛海洋大学物理海洋实验室)

### 摘 要

本文报告波群统计特性研究结果的第一部分,提出了描述波群高低和强弱特性的物理量——波群高度的定义,并给出由波包谱零阶矩和波面谱二阶矩计算波列均方根群高和均方根相对群高两个波群高度统计特征量的方法,其中波包谱的估计可借助于Hilbert变换由波面高度记录得到,利用了规则波造波系统在水槽内产生的具有不同群性的波列作了验证,验证结果是令人满意的。

海浪常以群的形式出现,这是它的重要特性,这个特性与海洋工程的关系尤为密切,近年来大量实验表明,波群对水工建筑物、船体和锚系体等的作用与无群波的不同,Johnsor等人<sup>[1]</sup>在其对比试验中发现,具有大体相同的频谱和波高分布的两波列,有群者对斜坡防波堤的破坏作用较无群者的大得多,Gravesen等<sup>[2]</sup>指出,对固有频率显著小于波列主要频率的水工建筑物进行模型实验时,必须模拟有群性的现场海浪,防波堤的越水计算、水工建筑物和锚系体的受力计算也都要考虑波群的作用,因此,波群的研究在国内外国日益引起重视,特别在1978年葡萄牙锡尼斯深水防波堤遭受破坏后,一调查和模拟实验结果表明波群的作用是造成斜坡堤护面块体失去稳定的一个重要因素。

迄今波群统计的方法有三类:一是基于相邻波高相互独立假定下的统计理论<sup>[3]</sup>;二是基于波包理论;三是基于假定波面高度时间序列具有马尔柯夫特性的连长理论<sup>[4]</sup>,不论上述哪种理论,都存在一个问题——其基本假定或不够合理,或具有较大的局限性,事实上,就文献〔5—10〕所述对以上理论的检验结果而言,不论哪种方法给出的计算值均小于实测值,此外,上述三类方法多集中于处理波群的时间特性,较少涉及波群的高度特性。

70年代初,Nolte与Hsu<sup>[11]</sup>和Ewing<sup>[12]</sup>利用Longuet-Higgins的载波理论研究波群问题,取得较好的结果,他们分别给出了用波面谱的零阶矩和二阶矩表示的波群平均历时长度和平均连长(即群内含波的平均数)计算公式,80年代以来,对波群的研究逐渐集中于如何描述波群的群性,1980年,Funke和Mansard<sup>[13]</sup>提出用所谓“瞬时波能平滑过程线”(Smoothed Instantaneous Wave Energy History,简称SIWEH)来显示波群,SIWEH是由波面高度的平方 $S^2(t)$ 经Bartlett窗平滑而得,B氏窗起低通滤波器作

本文于1988年12月18日收到,修改稿于1989年3月5日收到。

\* 国家自然科学基金资助项目的部分成果。

用, 借以滤掉波列的高阶奇量。适当的SIWEH可反映波振幅的慢变化(或称为波群的“结构”)。进而, Funke 和Mansard 利用SIWEH谱和波面谱的矩来表示波群的群性。他们定义前者零阶矩 $m_{0,\varepsilon}$ 的平方根与后者零阶矩 $m_0$ 之比为“群因子” $GF$ , 即,

$$GF = \sqrt{m_{0,\varepsilon}} / m_0. \quad (1)$$

$GF$ 越大, 波列的群性越明显, 因此,  $GF$ 可起到显示波列群性的作用。

Sand<sup>[13]</sup>认为, 波面起伏通过辐射应力可产生长波, 此长波的谱可通过转换函数 $G_{nm}(f, \Delta f)$ 自波面谱导出, Sand 也定义了一个描述波群群性的因子 $G_s$ , 它是由长波谱零阶矩、波面谱零阶矩的转换函数表示的:

$$G_s = \sqrt{m_{0,\zeta}} / [G_{nm}(f, \Delta f) / m_0]. \quad (2)$$

波群实际上是一种波列振幅慢变化的现象, 从波面的动态几何图像

$$\zeta(x, t) = \text{Re}\{A(x, t)e^{i\phi(x, t)}\} \quad (3)$$

来看, 波群即为波列局地振幅 $A(x, t)$ (或称波面包络, 简称波包)随空间和时间慢变化的现象, 因此, 用波包 $A(x, t)$ 来讨论波群无疑会收到既方便又直接之效, 我们利用通讯理论和光学中常采用的Hilbert 变换很容易地从固定点波面高度记录 $\zeta(t)$ 直接计算出波包。

本文提出波群高度的概念和定义, 给出用波包谱零阶矩和波面谱零阶矩表示的两个关于波群高度的统计特征量的计算公式, 并报告用这两个公式进行实验验证的结果。

## 一、波包与波群

用波包讨论波群的前提在于首先从波面高度记录计算出波包来, Hilbert 变换为此提供了准确而有效的手段, 这在文献[15]中已有详细的论述, 这里再作一简明的介绍。

Hilbert 变换<sup>[16]</sup>是一正交滤波系统, 其系统函数 $H(j\omega)$ 和系统脉冲响应函数 $h(t)$ 分别为

$$H(j\omega) = \begin{cases} j, & \omega > 0; \\ -j, & \omega < 0; \end{cases} \quad (4)$$

和

$$h(t) = 1/\pi t. \quad (5)$$

实过程 $\zeta(t)$ 的Hilbert 变换被定义为

$$\begin{aligned} \zeta_s(t) &= \frac{1}{\pi} p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\tau)}{t-\tau} d\tau \\ &= \zeta(t) * h(t), \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $p$ 表示在 $t = \tau$ 处取柯西主值, 符号“ $*$ ”表示卷积, 式(6)的傅氏变换为

$$Z(\omega) = Z(\omega) H(j\omega) = \begin{cases} -jZ(\omega), & \omega > 0, \\ jZ(\omega), & \omega < 0, \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $Z(\omega)$  是  $\zeta(t)$  的傅氏变换. 实函数的傅氏变换具有 Hermit 对称性, 即

$$Z(\omega) = Z^*(-\omega). \quad (8)$$

所以, 将它的负频率部分去掉再将这部分折叠到正频率部分, 并不损失信息. 这样便得到所谓单边交换

$$\Xi(\omega) = Z(\omega)[1 + \text{sgn}(\omega)], \quad (9)$$

对上式进行傅氏逆变换得

$$\xi(t) = \zeta(t) + \zeta(t) * \frac{j}{\pi t}. \quad (10)$$

再与式 (6) 比较得

$$\xi(t) = \zeta(t) + j\check{\zeta}(t). \quad (11)$$

$\xi(t)$  为实函数  $\zeta(t)$  对应的复函数; 其实部和虚部分别为实函数  $\zeta(t)$  本身和它的 Hilbert 变换  $\check{\zeta}(t)$ . 用这种复函数表示波动的方法是由 Gabor [7] 于 1946 年提出的. 在海浪研究中, 首先由 Melville [18] 于 1983 年用于研究海浪的频率和相速调制.

依式 (3) 和 (11), 固定点波面高度的复函数可写为

$$\xi(t) = A(t)e^{j\phi(t)} = \zeta(t) + j\check{\zeta}(t), \quad (12)$$

其中,  $A(t)$  为振幅函数, 即波包;  $\phi(t)$  为位相函数. 由此有

$$\zeta(t) = \text{Re}\{A(t)e^{j\phi(t)}\}, \quad (13)$$

$$\check{\zeta}(t) = \text{Im}\{A(t)e^{j\phi(t)}\}. \quad (14)$$

从而得

$$A(t) = \sqrt{\zeta^2(t) + \check{\zeta}^2(t)}, \quad (15)$$

$$\phi(t) = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{\check{\zeta}(t)}{\zeta(t)} \right]. \quad (16)$$

式 (7) 还给出了由波面高度记录计算其 Hilbert 变换的简单方法: 首先将波面高度记录作傅氏变换求得  $Z(\omega)$ , 然后按式 (7) 计算  $\check{Z}(\omega)$ , 再将  $Z(\omega)$  作傅氏逆变换即得到  $\check{\zeta}(t)$ . 由  $\check{\zeta}(t)$  和求得的  $\zeta(t)$ , 按式 (15) 和 (16) 便可计算波包  $A(t)$  和位相  $\phi(t)$ . 文献 [15] 中已给出由波面高度记录按上述方法计算波包的实例, 并证明波包服从 Rayleigh 分布, 此不赘述.

波面高度的平方是波动能量的量度. 无论在理论和应用上, 波能的计算都是重要的. 从式 (13) 我们有

$$\zeta^2(t) = A^2(t) \cos^2[\phi(t)]. \quad (17)$$

上式还可表示成另一种形式

$$\zeta^2(t) = P(t) + G(t), \quad (18)$$

其中

$$P(t) = \frac{1}{2} A^2(t) \cos[2\phi(t)] = \frac{1}{2} [\zeta^2(t) - \check{\zeta}^2(t)], \quad (19)$$

$$G(t) = \frac{1}{2} A^2(t) = \frac{1}{2} [\zeta^2(t) + \check{\zeta}^2(t)]. \quad (20)$$

由此可见,波动能量可分为两项—— $P(t)$  和  $G(t)$ 。前者为波能的快振动项,它反映波能的快速变化部分;其振动频率为波面起伏频率的两倍,时间平均为零。后者的变化远较前者慢,它反映波动能量的净运输,我们称之为“群项”;这一项总是正值,为波包平方之半。

波面高度平方  $\zeta^2(t)$  经数字低通滤波后,与高频分量有关的能量  $P(t)$  被平滑掉,只剩下群项  $G(t)$ 。不难理解, Funke 和 Mansard 提出的 SIWEH 实质上就是  $G(t)$ 。显然,不论就反映  $G(t)$  的准确性还是计算上的难易程度而言, SIWEH 方法都不及式 (20) 优越。

波包  $A(t)$  及其平方都可用来反映波列的群性。Funke 和 Mansard 采用了后者。我们认为前者的作用更直接、更确切。

## 二、波群高度

Johnson<sup>[1]</sup> 于 1978 年曾按同一波面谱产生了两个群性不同的波列。依 Nolte 等和 Ewing, 具有同一波面谱的两波列的波群平均历时长度和平均连长应相等,群性的不同主要表现在波包起伏幅度的不同。Funk 和 Mansard 报告的三列群性不同波列的波面谱也相差不大,但它们的 SIWEH 却有明显的差异;这就是说, Funke 和 Mansard 所说的“群性”不同也是指波包起伏幅度的不同。由此可见,波包起伏幅度是波群的一个很重要的特征。此特征与海洋工程的关系尤为密切。本文将以波群高度(简称群高)来量度波包起伏幅度。迄今已提出的有关波群的统计特征量都是关于波群的时间特性的,如 Nolte 和 Hsu 提出的波群平均历时长度和 Ewing 提出的波群平均连长。这些特征量都不能反映波群的高低或强弱。群高主要是量度群内外波振幅之差的,从而其统计特征量就能反映波群的平均高低和强弱。

图 1 为波群群高定义示意图。其中实线代表波面高度,虚曲线为波包  $A(t)$ , 横虚线

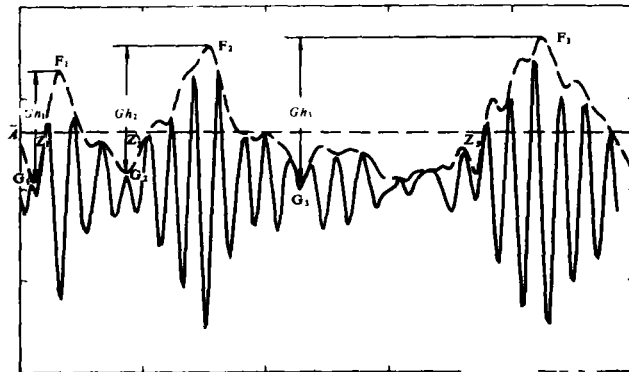


图 1 波群群高定义示意图

为波列的平均振幅  $\bar{A}$ 。  $[A(t) - \bar{A}]$  形成一新的平稳过程的过程曲线。它的正半周形成水平为  $\bar{A}$  的波群。群高被定义为曲线  $[A(t) - \bar{A}]$  相邻两上跨零点之间的最大高度差。图中  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$  为  $[A(t) - \bar{A}]$  的上跨零点;  $F_1, F_2, F_3, \dots$  为其正半周最大值点;  $G_1, G_2, G_3, \dots$  为其负半周最小值点;  $Gh_1, Gh_2, Gh_3, \dots$  即分别为第一、二、

### 三、……波群的群高。

既然群性相差颇大的波浪的波面谱可以相差很小或大体相同(如Johnson的两列群性不同的波和 Funke 的三列群性不同的波那样), 仅有波面谱就不足以确定波列群高的统计特性。鉴于上述的波包与波群的密切关系, 这里建议用波包  $A(t)$  的频谱来统计波群群高。

波包谱  $a(f)$  由下式估计:

$$a(f) = \frac{2}{T} \left| \int_0^T [A(t) - \bar{A}] e^{-j2\pi ft} dt \right|^2, \quad (21)$$

其中,  $\bar{A}$  按式

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt \quad (22)$$

计算,  $T$  为记录的时间长度。

依平稳随机过程理论, 时间序列  $[A(t) - \bar{A}]$  的均方值  $\sigma_A^2$  可由波包谱  $a(f)$  的零阶矩  $m_{0,A}$  表示出来:

$$\sigma_A^2 = \int_0^\infty a(f) df = m_{0,A}. \quad (23)$$

由此就可将波列的均方根群高  $Gh$  用  $m_{0,A}$  表示出来, 即

$$Gh = 2 \sqrt{2\sigma_A^2} = 2\sqrt{2m_{0,A}}. \quad (24)$$

$Gh$  是一个关于波群绝对高度的统计特征量。

此外, 还定义一个关于波群相对高度的统计特征量——相对均方根群高  $GHR$ 。如所周知, 波列的均方根波高正比于波面谱零阶矩的平方根<sup>[19]</sup>。同样, 由式(24)知, 波列的均方根群高正比于波包谱零阶矩的平方根。于是, 我们定义这两个平方根之比为相对均方根群高, 即

$$GHR = \sqrt{\frac{m_{0,A}}{m_0}}, \quad (25)$$

式中

$$m_0 = \int_0^\infty S(f) df, \quad (26)$$

$S(f)$  为波面谱。显然,  $GHR$  愈大, 波列的群性愈明显。所以,  $GHR$  也能简明地反映波列的群性。

类似于 Funke 与 Mansard 定义的群因子  $GF$  和 Sand 定义的群因子  $G_\xi$ , 我们也可以由波包谱零阶矩和波面谱零阶矩定义一个群因子  $G_A$ ,

$$G_A = m_{0,A} / m_0. \quad (27)$$

比较式(25)和(27)可知

$$G_A = (GHR)^2. \quad (28)$$

Funke 与 Mansard 和 Sand 在介绍群因子  $GF$  和  $G_\xi$  时, 只提及群因子可以用来显示波列的“群性”, 并没有明确指出“群性”的含义, 也没有说明群因子的确切物理意义。而本文将“群性”赋以明确的含意, 即相对群高的大小; 式(28)则清楚地表明, 群因子  $G_A$  是波列相对群高的一种量度。

### 三、实验验证

针对以上提出的有关群高的统计公式, 我们作了实验验证. 实验是在青岛海洋大学物理海洋实验室大型水槽内进行的. 水槽总长 65 m, 宽 1.2 m, 高 1.45 m. 不规则波造波系统是从丹麦引进的. 实验时水深 0.85 m, 测点距造波板 13 m, 波面高度是用电阻式测波仪测量的. 考虑到波包的主要频率较低, 为保证谱估计的置信度和分辨率, 各波列的记录时间长度均取 1800 s.

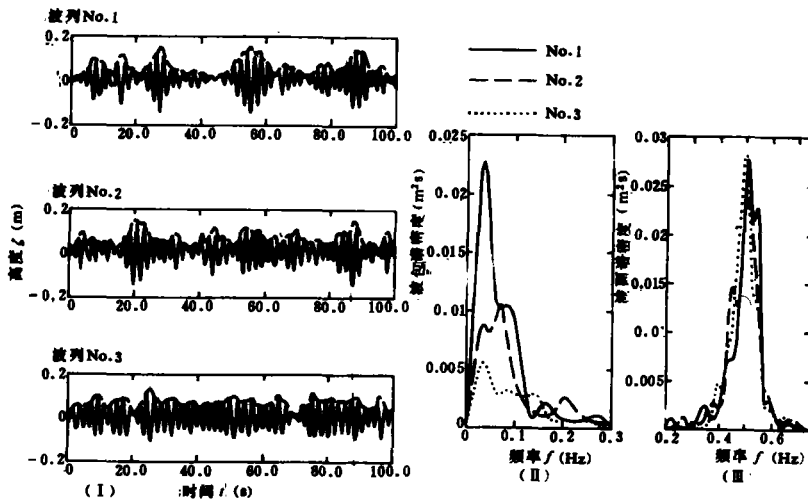


图 2 由不规则波造波机产生的三列群性不同的波及其波包谱和波面谱

图 2 (I) 所示的三个波列是由不规则造波机在水槽内产生的; 图中由虚线表示的波包是用 Hilbert 变换计算的. 图 2 (II) 给出各波列对应的波包谱. 图 2 (III) 给出对应的波面谱. 从此图可以看出, 三列波的群性相差较大, 而它们的波面谱却相差无几; 但另一方面, 这三列波对应的波包谱区别又很明显——群性较大的波列具有谱值较大的波包谱. 我们用这三列波对上面提出的均方根群高计算公式 (24) 和相对均方根群高计算公式 (25) 作了检验. 检验的方法是: 对每个波列逐个波群作实际测量和统计, 计算出经验均方根群高  $\overline{Gh}$  和相对均方根群高  $\overline{GHR}$ , 同时按式 (24) 和 (25) 计算理论均方根群高  $Gh$  和相对均方根群高  $GHR$ , 然后将经验值与理论值作比较. 表 1 汇集了这两种值. 从此表可以看出, 经验值与理论值的符合甚好.

表 1 均方根群高与相对均方根群高理论值和经验统计值的比较

波 列	$Gh$ (m)	$\overline{Gh}$ (m)	$GHR$	$\overline{GHR}$
No. 1	0.11	0.11	0.78	0.85
No. 2	0.09	0.08	0.61	0.59
No. 3	0.07	0.06	0.47	0.43

## 四、讨论与结语

用波包描述和分析波群具有直接和确切的优点,而波包可借助于 Hilbert 变换容易从波面高度记录得到。以此为前提,本文定义了一个具有明确物理意义,能确切地描述波群高低或强弱特性的量——波群高度,并将它的统计值以波包谱的零阶矩简明地表示出来。就有限的实验验证结果而论,提出的定义和计算公式是合理的。当然,要将它们应用于复杂的实际海浪,尚需用实测海浪资料加以验证。我们正在着手这方面的工作。

由于实际海浪的复杂性,计算出来的波包将会含有高频小分量。用这样的波包对波群作分析前,显然应稍加平滑。

在本文的续篇中,我们将用波包来讨论波群的时间特性——波群的历时长度和连长;给出由波包谱的矩和波面谱的矩表示的任意水平的波群平均历时长度和平均连长的计算公式。

## 参 考 文 献

- [1] Johnson, R. R. *et al.*, Effect of wave grouping on breakwater stability, *Proc. 16th Coastal Eng. Conf.*, 3 (1978), 2228—2243.
- [2] Gravesen, H., Model test with directly reproduced nature wave trains, *Proc. 14th Coastal Eng. Conf.*, 1 (1974), 372—385.
- [3] Rice, S. O., Mathematical analysis of random noise, Reprinted in selected paper on noise and stochastics processes, Dover Pub. IUC., 1944.
- [4] Goda, Y., Numerical experiments on wave statistics with spectral simulation, *Rept. P. H. R. I.*, 9 (1970), 3: 3—57.
- [5] 葛明达, 连云港的波群统计分布, *黄渤海海洋*, 4 (1986), 2: 8—14.
- [6] 蔡清贵等, 台风波浪的波群统计特征, *热带海洋*, 5 (1986), 2: 60—66.
- [7] 常德耀, 胶州湾波群的统计分布, *海岸工程*, 6 (1987), 1: 37—43.
- [8] Siefert, W., Consecutive high waves in coastal waters, *Proc. 15th Coastal Eng. Conf.*, 2 (1976), 171—182.
- [9] 間瀬肇ほか, 現地波浪の wave group 特性に關ろを研究, 第30回海岸工学講演會論文集, 1983, 173—177.
- [10] 杨正已等, 波群的统计分析与模拟, *水利水运科学研究*, 1988, 2: 13—26.
- [11] Nolte, K. G. and F. H. Hsu, Statistics of ocean wave groups, *Fourth Annual Offshore Technology Conf. Paper, OTC 1688*, 2 (1972), 637—644.
- [12] Ewing, J. A., Mean length of runs of high waves, *J. Geophys. Res.*, 78 (1973), 12: 1933—1936.
- [13] Funke, E. R. and E. P. D. Mansard, On the synthesis of realistic sea states in a laboratory flume, *Proc. 17th Coastal Eng. Conf.*, 3 (1980), 2974—2991.
- [14] Sand, S. E., Wave grouping described by bounded long waves, *Ocean Eng.*, 9 (1982), 6: 567—580.
- [15] 徐德伦等, 海浪波面包线的计算及其分布函数的再推导, *海洋学报*, 11 (1989), 4: 411—416.
- [16] Papoulis, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 1965, 355—357.
- [17] Gabor, D., *Proc. IEE (London)*, Ser. 3 (1946), 93: 429.
- [18] Melville, W. K., Wave modulation and breakdown, *J. Fluid Meck.*, 128 (1983), 489—506.
- [19] 文圣常、余宙文, *海浪理论与计算原理*, 科学出版社, 1984, 195.