

蒙特-卡洛方法在海洋工程 设计中的应用

刘德辅 施建刚

(天津大学)

周志刚

(中国国际海洋石油工程公司)

摘 要

近年来,我们在有关海洋工程的问题中,应用蒙特-卡洛方法取得了一定的成果。这表明,在海浪统计分布的参数估计、台风波浪长期极值分布的概率模式检验和海上平台失效概率估计等方面,蒙特-卡洛方法都可以得到广泛的应用。

蒙特-卡洛(简记为M-C)方法是通过随机变量的统计试验和随机模拟,来求解数学、物理和工程技术问题的近似数值解法,用以描述一般数学或物理模拟方法不能解决的问题,因此,它在各个领域已得到日益广泛的应用。

本文介绍的M-C法在三个方面的应用都是海洋工程规划、设计中的重要组成部分。首先,Gamma分布(皮尔逊三型分布)是我国海洋工程和水利工程中推求环境因素设计值的主要分布模式之一,在工程领域得到了广泛的应用,但是,此法对分布参数估计方法的比较——矩法、自协方差法和极大似然法至今尚无全面的评价。本文用M-C统计试验方法,对此作出了解答。其次,针对我国各海域台风活动频繁的特点,1980年曾提出过既可考虑台风侵袭频次,又可考虑其强度的一种台风波浪长期分布理论模式——“复合极值分布理论”。为了比较Poisson-Gumbel复合极值分布和其它理论分布的差异,我们采用M-C方法得到了满意的结果。最后,在海洋平台设计中使用可靠性分析方法已逐渐引起人们的重视。M-C法可在极限状态函数分布未知的情况下,对函数中基本随机变量进行抽样,直接得出结构的失效概率。本文针对深海平台设计中随机变量多、极限状态函数复杂、失效概率要求极小的特点,应用改进的M-C法编制计算程序,对平台桩腿更进一步作了可靠性分析。三种应用实例显示了M-C方法在海洋工程研究中的广阔应用前景。

一、参数估计方法的评价

Gamma分布是对风、海浪、潮位等海洋环境因素以及洪水、暴雨等进行概率分析的主要概率模式之一,在相应的设计规范¹⁾中都作了推荐,但是,对分布参数的估计方法及其优劣比较,一直未有深入的研究,而用M-C方法可以得到相应的结论。

本文于1988年8月28日收到,修改稿于1989年6月1日收到。

1) 港口工程规范,1978。

Gamma分布的概率密度函数为

$$f(X; m, b) = \frac{b^{-m}}{\Gamma(m)} X^{m-1} e^{-X/b}, \quad 0 < X < +\infty,$$

其中, m 和 b 都大于零, m 为形状参数, b 为尺度参数, 具有 $EX = m \cdot b$, $DX = m \cdot b^2$, $Cv = 1/\sqrt{m}$.

参数估计的方法有矩法、自协方差法和极大似然法(简记为M-L法)三种^[1-3].

要评价三种参数估计方法的优劣, 需要采用相应数理统计中估计量的无偏性和有效性的标准, 对抽样分布的前二阶矩进行比较. 设 θ 代表 m 、 b 和 X_p 中的任一个, X_p 为设计值, θ_0 代表相应的总体真值. 求出 θ 的数学期望 $M\theta$ 和 θ 对真值 θ_0 的均方误差 $\sigma_\theta = \sqrt{M(\theta - \theta_0)^2}$. 比较三种方法所得的 $M\theta$ 和 σ_θ , 要求 $M\theta$ 尽可能接近 θ_0 , σ_θ 尽可能地小, 就可以鉴定估计方法的好坏. 由于目前尚不能用分析方法求出它们的精确值 $M\theta$ 和 σ_θ , 因此, 用精确法对抽样分布的前二阶矩进行比较目前是办不到的, 必须借助于M-C统计试验法.

给定 m_0 、 b_0 , 即 $f(X; m_0, b_0)$ 以后, 就可以进行符合此分布的随机变量的抽样, 从而得到一个容量为 N 的样本 $(x_1, x_2, \dots, x_N)_1$. 分别采用给出的三种估计法中的一种, 由这个样本估计出参数 m_1 和 b_1 , 并计算相应的 X_{p1} , 再进行抽样, 得到第二个样本 $(x_1, x_2, \dots, x_N)_2$, 同样算出第二组参数 m_2 、 b_2 和 X_{p2} . 仿此继续下去, 最后得到 K 个样本 $(x_1, x_2, \dots, x_N)_j$ ($j = 1, 2, \dots, K$), K 组参数和设计值 m_j 、 b_j 、 X_{pj} , $j = 1, 2, \dots, K$. 对这 K 组参数与真值进行统计, 求出其平均值和对真值的均方差.

$$E\theta = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \theta_j.$$

$$S\theta = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{j=1}^K (\theta_j - \theta_0)^2}.$$

根据车贝雪夫定理可知, 当 K 趋向很大时, 上述 $E\theta$ 、 $S\theta$ 将依概率分别收敛于精确解 $M\theta$ 和 σ_θ . 于是, 当 K 很大时, 就可用 $E\theta$ 和 $S\theta$ 来分别代替 $M\theta$ 和 σ_θ . 这样, 用分析法不能确定的 $M\theta$ 和 σ_θ , 就可用统计试验的方法求出其近似值, 从而对不同的估计方法可以进行比较.

我们在DPS-8机上进行过计算, 当取 $m = 2.5$ 、 $b = 0.5$ 时, 所产生的随机数的性能是优质的, 采用样本容量 $N = 50$, 样本个数 $K = 500$, 设计频率为百年一遇. 根据此方法的原理, 我们编制了计算程序, 计算结果见表1.

表1 Gamma分布统计试验结果

总体参数:		$m = 2.5$	$b = 0.5$	$X_p = 5.7433$
样本个数 K		500	500	500
估计方法 N		50	50	50
		矩法	自协方差法	极大似然法
统计值	Em	2.6844	2.6231	2.6175
	Sm	0.6202	0.5276	0.5248
	Eb	0.4903	0.4962	0.4975
	Sb	0.1159	0.1028	0.1033
	EX_p	5.5054	5.5584	5.5369
	SX_p	2.0326	1.8842	1.8229

(一) 偏移的比较

假设 H_0 是无偏估计量, H_1 是有偏估计量。根据统计理论, 在 H_0 成立的条件下, 当 $K \rightarrow \infty$ 时, 对 K 个估计值的均方误差 $S\theta^{(j)}$ 、 $M\theta^{(j)}$ 应渐近正态分布 $N(\theta_0, S\theta^{(j)}/\sqrt{K})$, 且 t 变量 $t = (M\theta^{(j)} - \theta_0) \cdot \sqrt{K}/S\theta^{(j)}$ 应服从自由度为 $K - 2$ 的 t 分布。表2给出了实际的 t 值。由假设检验理论 $P\{|t| > t_{\alpha/2}\} = \alpha$, 当 $\alpha = 0.02$ 时, $t_{\alpha/2} = 2.326$ 。若表中 $|t| > t_{\alpha/2}$, 则拒绝 H_0 而接受 H_1 ; 当 $|t| < t_{\alpha/2}$ 时, 则接受 H_0 。

从表中可看出, 对参数 m 的估计, 三种方法无偏性的假设都被拒绝。参数 b 的估计可以接受无偏性的假设, 这与理论上推出的结论是相符的〔3〕。对比较关心的设计值, 只有自协方差法接受无偏性的假设。

表 2 $K = 500$ 的 t 值

特征值	估 计 方 法		
	矩 法	自协方差法	M - L
m	6.638	5.217	5.006
b	-1.871	-0.826	-0.584
X_p	-2.617	-2.194	-2.532

(二) 准确性

对表 1 给出的估计值均方差 $S\theta^{(j)}$, 利用 F 检验的原理来进行各种方法显著性的研究。先对 m 进行 F 值计算, 即为所要比较的两均方差之比, 见表3。对 $K = 500$, 5%水平的 F 置信值为1.15。可见, 自协方差法与M - L法对参数 m 的估计差异不大, 但矩法、自协方差法和M - L法对 m 的估计差异显著。

表 3 参数 m 的 F 值

方 法	方 法		
	矩 法	自协方差法	M - L法
矩 法	1		
自协方差法	1.382	1	
M - L 法	1.397	1.011	1

对参数 b 及最终结果 X_p 的比较, 结论与上述相同, 见表 4 和 5。

表 4 参数 b 的 F 值

方 法	方 法		
	矩 法	自协方差法	M - L法
矩 法	1		
自协方差法	1.271	1	
M - L 法	1.259	1.010	1

表 5 百年一遇的 F 值

方 法	方 法		
	矩 法	自协方差法	M - L法
矩 法	1		
自协方差法	1.164	1	
M - L 法	1.243	1.067	1

结论是: 无论从哪个总体特征值来考虑, 矩法与自协方差法和M - L法的差异显著, 且矩法对各种总体特征值估计的均方差最大, 故矩法不宜采用。

自协方差法与极大似然法无显著差异。考虑到M - L法计算烦琐, 而自协方差法确定方便, 结果又与之差别不大, 且从无偏性的讨论中看出, 只有自协方差法满足无偏性的假设。

综上所述, 自协方差法对Gamma分布的参数确定是一个值得推荐的方法。

二、台风波浪长期分布概率模式

的M - C 检验

在文献〔5〕中提出了计算台风波浪长期分布的Poisson-Gumbel 复合极值分布模式,

近年来在国内外已引起一定的关注。为了检验和比较 Poisson - Gumbel 复合极值分布与其它分布的优劣，我们使用了 M - C 法。其步骤如下。

首先，给定一个台风出现的年平均次数 λ ，就能产生一个符合 Poisson 分布 ($P_k = \lambda^k \exp(-\lambda/K!)$) 的整数 K 。

其次，产生 K 个 $[0, 1]$ 均匀分布的随机数 Y_i ，作变换 $X_i = -\ln(-\ln Y_i)$ ，就可得到 K 个符合标准 Gumbel 分布的随机数。

最后，将 K 个随机数按序排列，选出其中最大值。

完成以上三个步骤后，即可得到相应一年的台风波高记录(台风出现频次符合 Poisson 分布，波高符合 Gumbel 分布)。

重复以上步骤 100 次，即可得到相应于百年的记录。以百年记录为一组，反复试验，即可得到多个百年一遇值。例如，对 $\lambda = 3$ ，共产生 236 组记录，即共有 23 600 年的资料。同样，对 $\lambda = 2.0$ 和 $\lambda = 2.5$ 都进行了 100 组以上的试验。试验结果表明，Poisson - Gumbel 复合极值分布与模拟结果符合很好。以下举 $\lambda = 3.0$ 为例进行说明。

从 236 组中任选 100 组为相应的 10 000 年的试验数据，以它们为经验点数据点在概率纸上，然后分别以 Gumbel 分布和 Poisson - Gumbel 极值分布作图和计算，结果见图 1 和表 6。由此可以看出，对比较大的重现期，后者对经验点的符合程度比前者要好得多。

对 $\lambda = 3.0$ ，236 组中每组的第一大值(百年一遇值)系列的分布由图 2 表示。由图可见，由百年一遇值所组成的极值分布的众值在 5.5 和 6.0 之间，非常接近于用复合极值分布法计算的百年一遇值 $x_{1\%} = 5.697$ 。这里，236 个百年一遇值的平均值为 6.32，它也接近方差 $\sigma = 1.4$ 时理论上计算的结果： $\bar{x} = \mu + \gamma \cdot \sigma = 5.697 + 0.5772 \times 1.4 = 6.5$ 。

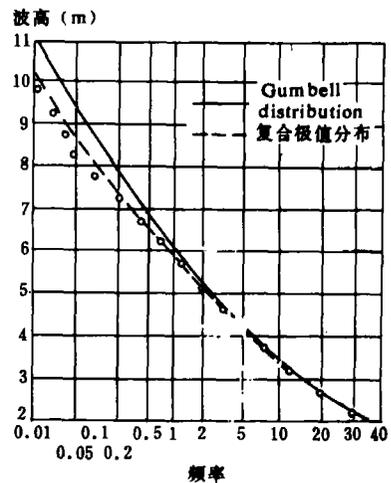


图 1 统计试验值的比较

表 6 统计试验值的比较

计算·模型	计算值和误差			
	重 现 期			
	万年一遇	二千年一遇	千年一遇	五百年一遇
统计试验值	9.80	8.20	7.80	7.25
复合极值分布	10.30	8.69	8.01	7.31
误 差	0.50	0.49	0.21	0.06
Gumbel 分布	11.12	9.40	8.63	7.90
误 差	1.32	1.20	0.83	0.65

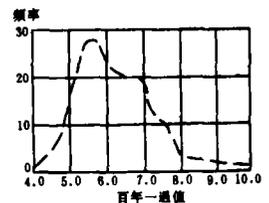


图 2 百年一遇分布曲线

此外，在风险计算中，百年一遇值(对使用期为一百年时)的出现概率 $(1 - (1/e)) \approx 0.632$ ，而统计试验值为 0.65，两者非常接近。

三、平台结构可靠度计算

设统计上独立的随机变量 x_1, x_2, \dots, x_n 分别表示荷载、抗力、结构几何参数等, 其对应的概率密度函数分别为 $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$, 结构状态方程为

$$Z = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (1)$$

当 $Z < 0$ 时, 结构发生破坏; $Z > 0$ 时, 结构安全。

失效概率为

$$P_f = \iiint \dots \int_{g(x) < 0} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (2)$$

式中, $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为基本随机变量的联合概率密度函数, 多重积分式 $g(x) < 0$ 。一般来说, 联合概率密度函数是未知的, 积分域是隐含的, 故用解析解求 P_f 是非常困难的。

用 M-C 法计算 P_f , 要先根据基本随机变量分布, 由计算机产生一组抽样组, 代入极限状态方程 (1) 求得 Z_i 。若 $Z_i \geq 0$, 则结构安全; 若 $Z_i < 0$, 则表示结构失效。总共进行 N 次抽样, 设有 N_f 次结构失效, 则结构失效概率为

$$P_f = \frac{N_f}{N}, \quad (3)$$

即失效概率是结构失败次数占总次数的频率。当 N 足够大时, 由大数定律可知, 这是正确的。

若用 95% 的置信度来保证 M-C 法解题的误差, 则有

$$\varepsilon = 2\sqrt{P_f(1-P_f)/N}. \quad (4)$$

因此, 为了达到一定精度, N 必须足够大。文献²⁾ 建议 N 必须满足 $N \geq 100/P_f$ 。

对海洋工程来说, 由于 P_f 是一个很小的数, 要求计算模拟次数高达百万次以上, 使用一般的计算机分析, 不是遇到困难, 就是花费机时太多, 并且盲目提高运转次数也不能显著地提高精度, 因此, 必须加以改进。

关于 M-C 法求结构可靠度的改进, 国内外许多学者作了大量工作。对海洋工程来说, 下面的改进方法比较适用。

对式 (2) 的积分, 积分区域即为失效区域 $g(x) < 0$, 记为 Ω 。这是一个求定积分的问题, 我们用 M-C 平均值法求此积分^[5]。此法首先要求取一个包含所求积分域的多维矩形区域。虽然结构失效, 区域 Ω_1 未知且为无穷域, 但由于结构可靠度问题中各随机变量的概率密度函数在两端处都很小, 甚至可以忽略, 因此, 对每个随机变量 x_i 有可能取一定的区域 (x_{i1}, x_{i2}) , 而使 $\int_{x_{i1}}^{x_{i2}} f_{x_i}(x) dx \approx 1$, 这样, 失效区域近似包含于如下区域:

$$\Omega_1 = [x_{11}, x_{12}] \times [x_{21}, x_{22}] \times \dots \times [x_{n1}, x_{n2}] = D.$$

设 n 为 N 次模拟中落入 Ω_1 的次数, 则由文献²⁾ 知, 失效概率为

$$P_f = \frac{|\Omega_1|}{n} \sum_{\Omega_1} f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}), \quad (5)$$

2) 吴世伟, 结构可靠度分析, 河海大学, 1986.

式中, $\sum_{\Omega_1} f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ 表示模拟变量 $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ 落入区域 Ω_1 时, 它们的联合概率密度的迭加。

由于在多维矩形区域内总是均匀取点的, 故 $|\Omega_1|/n = |D|/N$, 即

$$P_f = \frac{|D|}{N} \sum_{\Omega_1} f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}). \quad (6)$$

另外, 观察积分式

$$\int_{x_{n1}}^{x_{n2}} \dots \int_{x_{21}}^{x_{22}} \int_{x_{11}}^{x_{12}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \approx 1,$$

以式(6)的形式表示, 即为

$$\frac{|D|}{N} \sum_{i=1}^N f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \approx 1, \quad (7)$$

则由式(6)/(7)得

$$P_f = \frac{\sum_{\Omega_1} f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})}{\sum_{i=1}^N f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})}. \quad (8)$$

如果各随机变量相互独立, 则有

$$P_f = \frac{\sum_{\Omega_1} \prod_{j=1}^n f_j(x_j^{(i)})}{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^n f_j(x_j^{(i)})}, \quad (9)$$

这就是改进的M-C法的基本公式。

我们据此在DPS-8机上编制了计算程序, 它适用于计算多个任意分布的独立变量的结构的失效概率和可靠度指标。由于在整个数轴上均匀取点是不可能的, 因此必须取某个合适的变化范围。令

$$E_{1i} = E_{2i} = f_{x_i}(\mu_{x_i})/10^E, \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

式中, μ_{x_i} 为 x_i 的均值。由 E_{1i} 、 E_{2i} 用反函数法或二分法求得 x_i 的取值区间为 (x_{E_1}, x_{E_2}) 。E一般取9—11时, P_f 就已趋于稳定。

表7列出了各种方法计算失效概率的比较。由表可见, 改进法一般模拟次数为3000次左右。它克服了直接法的致命弱点, 与精确解JC法相比差别很小, 误差只有千分之几, 因此, 改进的M-C法不仅计算简便而且精度高。

作为方法的应用, 我们对一自升式平台的一条桩腿进行了整体稳定的可靠性分析。

(一) 荷载与结构特性变量的分布和确定性

我们利用南海北部湾实际观测的资料, 得到了作用在平台上的波流力和内力的长期分

表 7 改进的M-C法计算结果比较

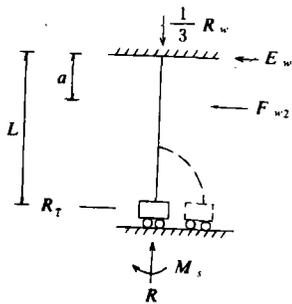
极限状态方程	变量分布类型			数字特征 (μ_i, σ_i)	改进M-C法				直接M-C法			JC法 β
	正态	对数正态	极 I		E	N	P_f	β	N	P_f	β	
$Z = Y_1 - 0.024Y_2$	Y_1			(700, 0.2)	11	30 000	0.055 1	1.597	30 000	0.053 2	1.615	1.608 5
	Y_2			(18 750, 0.15)								
$Z = Y_2 - \frac{8100(Y_1 + Y_4)}{Y_3^2}$	Y_1			(60, 0.1)	11	20 000	0.04138	1.735	30 000	0.011 2	1.724	1.761 6
		Y_2		(2 000, 0.037)								
		Y_3		(24, 0.05)								
			Y_4	(50, 0.2)								
$Z = (1.667 - 0.00123 \cdot Y_2) \times Y_2 - Y_1$	Y_1			(150, 0.1)	11	20 000	0.777 $\cdot 10^{-7}$	5.273	估计 需要 10^{10} 次			5.235 3
		Y_2		(200, 0.1)								

布，甲板重量、操作荷载是按南海西部石油公司提供的平台有关资料确定的；平台所用材料的性能（弹性模量、屈服极限）和结构几何尺度（杆件直径、壁厚）的变异是按文献〔6〕中的要求，并结合平台材料的特性确定的。各种变量的分布特性见表 8。

表 8 随机变量的分布特性

随 机 变 量	变量分布类型	分布均值	变异系数
风力	极值 I 型	33.3 t	0.43
波浪力	对数正态	77.2 t	0.55
甲板重量、操作荷载	正 态	8 000 t	0.1
弹性模量	对数正态	2×10^7 t·m ²	0.04
屈服应力	对数正态	7×10^4 t·m ²	0.1
立 柱	直 径	正 态	0.762 m
	壁 厚	正 态	0.022 m

(二) 平台桩腿整体压曲强度计算模型的建立



分析桩腿受力时，假定沉箱与桩腿连接处为完全固定，桩腿整体压曲。计算简图如图 3 所示。参照文献〔7〕，桩腿受力分析结果为：水平反力、轴向反力、水平力作用产生的角变形所引起的桩腿与沉箱连接处的弯矩。

从以往的经验看，沉箱与桩腿连接处容易发生破坏。按美国 API 规范的要求，此处合成应力的比值应满足下式要求：

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_{xe}} + \frac{\sigma_y}{\sigma_{ye}} \leq 1, \tag{11}$$

所以，桩腿屈曲的失败极限状态方程为

$$Z = \sigma_x \sigma_{ye} + \sigma_y \sigma_{xe} - \sigma_{xe} \sigma_{ye} = 0 \tag{12}$$

图 3 桩腿计算模型简图

用我们所编的改进的M - C法的计算程序进行分析计算, 最后得到平台桩腿整体屈曲的失效概率为

$$P_f = 0.10211910 \times 10^{-5}.$$

四、结 论

1. 对两参数 Gamma分布的参数确定方法, 以自协方差法为最佳, 也比较适用于工程实际计算。

2. 改进的M - C方法与直接法相比具有较大的优越性, 尤其对海洋平台这类结构复杂、失效概率很小的可靠度计算, 改进的M - C法显示其计算速度快、精度高的优点。随着计算机技术的普及, 这是一个实用的方法。

3. 复合Poisson - Gumbel 极值分布模型特别适用于计算小概率设计值, 尤其对台风波高之类极端环境条件的计算更显示其优越性。此法现已被国内外工程界和学术界所采用。

4. M - C统计试验法在参数估计方法的评价、分布模型拟合的评价、结构可靠度计算及经济评价等广泛的领域中得到了应用, 随着计算机技术的发展, 将更显示出它们的优越性。

参 考 文 献

- [1] Lee J.Bam., Max Engelhardt Wei Kei Shive, Approximate tolerance limits and confidence limits on reliability for the Gamma distribution, *IEEE Transactions Reliability*, R - 33 (1984), 2.
- [2] 王文军, Gamma分布的尺度参数及自协方差估计, *应用概率统计*, 1987, 3.
- [3] 戴 梁, Gamma分布的参数估计, *武汉水运工程学院学报*, 1987, 2.
- [4] Liu Teh -fu and Ma Feng -shi, Prediction of extreme wave heights and wind velocities, *Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division*, 1980, WW 4.
- [5] 王梓坤, *概率论基础及其应用*, 科学出版社, 1976.
- [6] 张圣埴, 固定式海洋平台的可靠性分析, *海洋工程*, 1985, 2.
- [7] 肖希书, 自升式钻井平台桁架型桩腿的设计, *海洋石油*, 1978, 3.