第12卷 第2期　海洋学报　Vol. 12, No. 2
1990年3月　ACTA OCEANOLOGICA SINICA　March, 1990

海洋对风暴响应的动力热力学分析*

张淮水

(青岛海洋大学物理海洋研究所)

摘　要

本文旨在讨论风暴影响下海气相互作用所造成的海洋响应问题．首先，说明适于描述问题的扰动微分方程组，主要给定两种机制的相互作用函数作为定解条件．其次采用特定的变量变换和变幂级数解法，对非线性扩散方程组求解．最后对圆形强风暴的响应扰动作计算，从而对海洋响应的发展过程作定量描述．

海洋在瞬变风场的激发下可能生成水平和铅直流动．这种局部流的形成与发展，主要决定于风场所诱致的海气边界过程．风场诱发海洋扰动的物理过程可能有二．一是水平风速的铅直切变在海气边界造成铅直动量通量；另一是依赖于海面风的感热和潜热的铅直热通量．描述这种海洋响应是复杂的，迄今多半考虑前者．例如对两层海洋的响应研究，Longuet Higgins[6] 以风应力旋度为脉冲讨论海洋的强迫行星波，Geister[8]，Price[9] 以及 Gill[4] 研究不同移速风暴的海洋惯性重力波和尾流．而O'Brien和Reid[10] 则把旋转风场作为初值，通过数值计算研讨两层海洋的非线性响应．所有这些研究均未考虑海气热交换的效应，而对海洋扰动的发展进程似乎尚未明确说明．因此，我们试讨论成层海洋在旋转风场的笼罩下，通过求解非线性扩散方程组，以揭示这种海洋响应的发展图像．

一、方程组和定解

海洋在旋转风场的控制下产生扰动．假定海洋原处于静止状态．海温的铅直分布为 $\theta_0(z)$，而盐度不变．如果扰动的水平尺度比铅直尺度大得多，则铅直加速甚小．这样可以应用“长波近似”，扰动的静力平衡关系充分成立．海水一般是不可压缩的．在风的影响下，海洋上层发生铅直方向的湍混合．如此，我们可采用圆柱坐标系，讨论轴对称的响应扰动．其运动方程、热流方程和连续方程如下：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}-fv-\frac{ag}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial r}\int_{\infty}^{z}\theta\,\mathrm{d}z=k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}+fu=k\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

本文于1987年7月25日收到，修改稿于1988年8月30日收到．

*国家自然科学基金资助项目．

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}+u\dfrac{\partial\theta}{\partial r}+w\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial z}-\Gamma\right)=k_\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2},\\ \dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{u}{r}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0\ .\end{array}\right\}$$

式中,r是径向坐标，z是海水深度，t是时间，u、v和w分别是径向、切向和轴向的扰动分速，θ是扰动温度，g是重力加速度，f是柯氏参数，k和k_θ分别是湍粘系数和导热系数，ρ_0是当盐度为35且海温为0℃时的海水密度，$\rho_0=1.028\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$．以上方程组中已经应用过扰动的静力学方程，$dp=\rho g dz$，$p$是扰动压，$\rho$是扰动密度；也应用过海水状态方程的扰动近似式，$\rho=-\alpha\theta$，$\alpha$是上述盐度时的热胀系数$\alpha=0.07\,\mathrm{kg/m^3\cdot deg}$．$\Gamma$是未扰海温铅直梯度，$\Gamma=-\partial\theta_0/\partial z$，可取$\Gamma=0.1\,\mathrm{deg/m}$.因此，初始和上下底边界条件给定为

$$u=v=w=\theta=0\ ,\qquad (t=0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial z}=w=0\ ,\\ \dfrac{\partial v}{\partial z}=Q_0\varphi(r,t)\ ,\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial z}=I_0\psi(r,t)\ ,\end{array}\right\}\qquad (z=0)\tag{2}$$

$$u=v=w=\theta=0\ .\qquad (z\to\infty)$$

式中,θ_0和I_0是已知常数,φ和ψ是待定的海气相互作用函数．

为讨论方便起见，我们把上列各式改为无量纲形式，并引进新变量如下:

$$\begin{array}{c}t=Tt^*,\qquad r=Lr^*,\qquad z=Hz^*\\ \theta=\Delta\Theta\theta^*,\quad (u,v)=V(u^*,v^*),\quad w=Ww^*\end{array}\tag{3}$$

这里所有大写字母分别代表其对应量的特征值，$\Delta\Theta$代表扰动温度的特征值．星号指相应的无量纲量．将式（3）代入式（1）、（2）则有

$$\left.\begin{array}{l}A\dfrac{\partial u^*}{\partial t^*}+u^*\dfrac{\partial u^*}{\partial r^*}+w^*\dfrac{\partial u^*}{\partial z^*}-\dfrac{v^{*2}}{r^*}-Fv^*-G\dfrac{\partial}{\partial r^*}\displaystyle\int^{z^*}\theta^*\,dz^*=\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2u^*}{\partial z^{*2}}\ ,\\ A\dfrac{\partial v^*}{\partial t^*}+u^*\dfrac{\partial v^*}{\partial r^*}+w^*\dfrac{\partial v^*}{\partial z^*}+\dfrac{u^*v^*}{r^*}+Fu^*=\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2v^*}{\partial z^{*2}}\ ,\\ A\dfrac{\partial\theta^*}{\partial t}+u^*\dfrac{\partial\theta^*}{\partial r^*}+w^*\left(\dfrac{\partial\theta^*}{\partial z^*}-B\right)=\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2\theta^*}{\partial z^{*2}}\ ,\qquad (p_r=k/k_\theta=1)\ ,\\ \dfrac{\partial u^*}{\partial r^*}+\dfrac{u^*}{r^*}+\dfrac{\partial w^*}{\partial z^*}=0.\end{array}\right.\tag{4}$$

$$u^* = v^* = w^* = \theta^* = 0 \qquad (t^* = 0),$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u^*}{\partial z^*} = w^* = 0 \\ &\frac{\partial v^*}{\partial z^*} = Q^* \varphi(r^*, t^*) \\ &\frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} = I^* \psi(r^*, t^*) \end{aligned}\right\} \quad (z^* = 0), \tag{5}$$

$$u^* = v^* = w^* = \theta^* = 0 \qquad (z^* \to \infty).$$

式中，各无量纲组合为

$$\begin{aligned} &A = \frac{L}{TV}, \quad F = \frac{fL}{V}, \quad G = \frac{\alpha g H \Delta\Theta}{\rho_0 V_2}, \\ &R = \frac{VH^2}{kL}, \quad B = \frac{\Gamma W}{\Delta\Theta} = \frac{\Gamma V H}{\Delta\Theta L}, \\ &Q^* = \frac{H}{V} Q_0, \quad I^* = \frac{H}{\Delta\Theta} I_0 \quad . \end{aligned} \tag{6}$$

上列非线性扩散方程组构成因变量u^*，v^*，w^*和θ^*的封闭方程组，因此在上述初始、边界等条件下可以定解．

二、海气相互作用函数

为决定海气相互作用函数φ 和ψ ，我们仅讨论圆形风暴下的性态．首先说明海气分界处的湍动量通量．假定圆形风暴的径向风速近似为零，而逆时针旋转的切向风速v_a表示如下：

$$v_a = v_M(r/r_M)e^{-(r-r_M)/r_M}.$$

式中，v_M是风暴的最大风速，r和r_M分别是风速v_a和最大风速v_M的径距．海面湍动量通量，即海面风应力，$\tau_a = \rho_a C_d v_a^2$，它可以写成

$$\tau_a = \tau_0(r/r_M)e^{-2r/r_M}$$

此处$\tau_0 = \rho_a C_d (e v_M)^2$，$\rho_a$是空气密度，$\rho_a = 1.26\,\mathrm{kg/m^3}$．$C_d$是海面阻滞系数，$C_d = 2.3\times10^{-3}$．海面$z = 0$处应力是连续的，故此地的流应力$\rho_0 k\partial v/\partial z$与风应力$\tau_a$相等．如果考虑风暴作用的持续时间因子，则海面应力的连续条件为

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_0}{\rho_0 k}(r/r_M)^2 e^{-2r/r_M} \sin\left(\frac{\pi}{T_s} t\right), \qquad (z = 0, t \leq T_s) \tag{7}$$

式中，T_s是风暴持续作用时间，$T_s = 2r_M/V_s$，其中V_s是风暴的移行速，$2r_M$是风暴的最大风速的直径．

至于海气间的热交换，基于海面扰动的热平衡条件：海面向下热通量与海面向上感热

和潜热通量之和相平衡．这里未考虑净辐射．因讨论风暴效应，辐射与风速无直接联系．考虑风暴作用的时间因子，我们可把海面热平衡条件写成

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{\rho_a C_{pa} C_d}{\rho_0 C k}\left(1+\frac{1}{B_o}\right)\Delta\theta_a v_M(r/r_M)e^{-(r-r_M)/r_M}\sin\left(\frac{\pi}{T_s}t\right)$$

$$(z=0,\quad t\leqslant T_s,\quad pr=1)\,. \tag{8}$$

式中C和C_{pa}分别是海和气的定压比热，$C_{pa}/C=0.25$．$\Delta\theta_a$是海气温差，气温减海温．Bo是Bowen数，根据张淮水等[7]，取$B_o=-0.08$．

如果将式（7），（8）与式（2）的对应式相比较，则得到

$$\left.\begin{aligned}
&Q_0=\tau_0/(\rho_0 k),\quad \varphi(r,t)=(r/r_M)^2e^{-2(r-r_M)/r_M}\sin\left(\frac{\pi}{T_s}t\right),\\
&I_0=\frac{\rho_a C_{pa} C_d}{\rho_0 c k}\left(1+\frac{1}{B_o}\right)\Delta\theta_a v_M,\ \psi(r,t)=(r/r_M)e^{-(r-r_M)/r_M}\sin\left(\frac{\pi}{T_s}t\right)
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

上式可以写成无量纲形式

$$\left.\begin{aligned}
&Q^*=\frac{H}{V}Q_0,\quad \varphi(r^*,t^*)=(L/r_M)^2r^{*2}e^{2-(2L/r_M)r^*}\sin\left(\frac{\pi T}{T_s}t^*\right),\\
&I^*=\frac{H}{\Delta\Theta}I_0,\ \psi(r^*,t^*)=(L/r_M)r^*e^{1-(L/r_M)r^*}\sin\left(\frac{\pi T}{T_s}t^*\right)
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

三、问题的基本解式

为便于求解上述无量纲形式的非线性扩散方程，我们类似于Баев[1]采用的变换，引进新变量

$$s=\frac{\sqrt{AR}}{2\tau}z^*\quad,\quad \tau=\sqrt{t^*}\quad,$$

同时寻求如下形式的幂级数解：

$$\left.\begin{aligned}
&\theta^*=\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n\tau^{n+1}\ ,\quad u^*=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\tau^{n+4}\ ,\\
&v^*=\sum_{n=0}^{\infty}v_n\tau^{n+4}\ ,\quad w^*=\frac{2}{\sqrt{AR}}\sum_{n=0}^{\infty}w_n\tau^{n+5}\ ,
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中θ_n，u_n，v_n和w_n则由下列方程组，以及初、边条件来确定．

$$\begin{aligned}
&A_{n+1}(\theta_n)=-\frac{8B}{A\sqrt{AR}}w_{n-6}+\frac{4}{A}\sum_{k=0}^{n-6}\left(u_k\frac{\partial\theta_{n-6-k}}{\partial r^*}+w_k\frac{\partial\theta_{n-6-k}}{\partial s}\right),\\
&A_{n+4}(u_n)=-\frac{8G}{A\sqrt{AR}}\frac{\partial}{\partial r^*}\int_s^{\infty}\theta_n\mathrm{d}s-\frac{4F}{A}v_{n-2}\\
&\qquad+\frac{4}{A}\sum_{k=0}^{n-6}\left(u_k\frac{\partial u_{n-6-k}}{\partial r^*}+w_k\frac{\partial u_{n-6-k}}{\partial s}-v_k\frac{v_{n-6-k}}{r^*}\right),
\end{aligned} \tag{12}$$

$$A_{n+4}(v_n) = \frac{4F}{A}u_{n-2} + \frac{4}{A}\sum_{k=0}^{n-6}\left(u_k\frac{\partial v_{n-6-k}}{\partial r^*} + w_k\frac{\partial v_{n-6-k}}{\partial s} + v_k\frac{u_{n-6-k}}{r^*}\right),$$

$$w_n = -\left(\frac{\partial}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*}\right)\int_0^s u_n \mathrm{d}s.$$

式中算符 $A_m(y) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}s^2} + 2s\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - 2my$，相应的初、边条件为

$$\left.\begin{array}{ll}
\theta_n = u_n = v_n = w_n = 0, & (\tau = 0); \\
\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\theta_n}{\partial s} = \psi_n,\quad \frac{\partial u_n}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial v_n}{\partial s} = \varphi_n,\quad w_n = 0, \end{array}\right\} & (s = 0); \\
\theta_n = u_n = v_n = w_n = 0, & (s \to \infty).
\end{array}\right\} \tag{13}$$

式中

$$\begin{aligned}
\psi_n &= (-1)^{\frac{n-2}{4}}\frac{2\left(\frac{T}{T_s}\pi\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{AR}\left(\frac{n}{2}\right)!}I^*\psi(r^*), \\
\varphi_n &= (-1)^{\frac{n+1}{4}}\frac{2\left(\frac{T}{T_s}\pi\right)^{\frac{n+3}{2}}}{\sqrt{AR}\left(\frac{n+3}{2}\right)!}Q^*\varphi(r^*),
\end{aligned} \tag{14}$$

此处负号的幂次取正整数.

上述方程组（11）仅对变量 s 来说是为常微分方程式.当 $n<6$ 时各式是线性的,当 $n\geq 6$ 时则为非线性. 但非线性项可以用 $n<6$ 的解表示，故所有 n 阶方程都变成线性的. 这就便于求解.

众所周知，齐次方程 $A_m(y)=0$ 满足边界条件 $y_{s=0}=1$ 和 $y_{s\to\infty}=0$ 的解为 $L_m(s)$；巢纪平[2,3]给出满足边界条件 $y_{s=0}=f(r^*)$ 和 $y_{s\to\infty}=0$ 的解为 $f(r^*)L_m(s)$；我们不难给定满足 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}s)_{s=0}=f(r^*)$ 和 $y_{s\to\infty}=0$ 的解为

$$y = \frac{A_{m-1}}{A_m}f(r^*)L_m(s). \tag{15}$$

对于非齐次方程 $A_m(y) = \sum_k a_k L_k + \sum_{i,j} b_{ij}L_iL_j$，其中 a_k 和 b_{ij} 与 s 无关，该式满足边界条件 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}s)_{s=0}=f(r^*)$ 和 $y_{s\to\infty}=0$ 的解为

$$\begin{aligned}
y = {} & \frac{A_{m-1}}{A_m}f(r^*)L_m + \sum_k \frac{a_k}{2(k-m)}\left(L_k - \frac{A_kA_{m-1}}{A_{k-1}A_m}L_m\right) \\
& + \sum_{i,j}\frac{b_{i,j}}{2}\Bigg\{\frac{A_iA_j}{A_{i+1}A_{j+1}}L_{i+1}L_{j+1} + \sum_{k=2}^{l}2^{k-1}(l-1)\cdots(l-k+1)\frac{A_iA_j}{A_{i+k}A_{j+k}}L_{i+k}L_{j+k} \\
& - \left(\frac{A_i}{A_{i+1}} + \frac{A_j}{A_{j+1}}\right)\frac{A_{m-1}}{A_m}L_m - \sum_{k=2}^{l}2^{k-1}(l-1)\cdots(l-k+1)\left(\frac{A_iA_j}{A_{i+k-1}A_{j+k-1}} + \frac{A_iA_j}{A_{i+k}A_{j+k}}\right)L_m\Bigg\}
\end{aligned} \tag{16}$$

式中$2l=m-(i+j)$，$l\geq 1$．

根据上列基本解，我们就容易求得本题的任何θ_n，u_n，v_n和w_n．

四、计算和分析

我们的目的在于了解海洋响应发展时的具体形象．为说明方便，假定风场为圆形强风暴，其持续时间$T_s=2r_M/V_s$，参看文献〔6〕.这里V_s是风暴移行速度．若取$V_s=20$km/h和$r_m=50$km，则$T_s=5$h．在中纬度$f=\omega/2\pi$，$\omega=7.29\times10^{-5}$rad/s．而海洋响应扰动的特征值以及各参数值可如下选取：

$$T=8.6\times10^4\text{s},\quad L=1\times10^5\text{m},$$
$$H=100\text{m},\quad V=1\text{m/s},$$
$$k=0.1\text{m}^2/\text{s},\quad \Delta\Theta=1\text{deg}\cdot$$
$$\Delta\theta_a=10\text{度},\quad B_0=0.08.$$

这相当于无量纲组合值为：

$$A=1.16,\quad F=\frac{\omega L}{2\pi V}=1.16,$$
$$G=0.67,\quad 1/R=1,$$
$$B=1\times10^{-4},\quad Q^*=3.31,$$
$$I^*=1.02.$$

应该指出，我们取特征时间T为23.9h，它与风暴持续时间T_s完全不同．k的取值为风暴潮计算中常用．B_o值在夏季中纬海洋多半如此[1]．$\Delta\theta_a$似乎较大，但在沿岸海域是可能出现的．此外，在计算过程中因B值很小，方程中含B值的项可以略掉．又因为考虑初始响应的发展取$t^*\leq0.5$，故级数解式（11）收敛极快，当计算到$n=9$时，其结果即可反映本问题的实质．现在将计算结果简述如下．

扰动温度，在无量纲径距$r^*=0.5$处，即$r=50$km，变动最明显，如图1虚线所示．当$\tau=0.2$时，相当于$t=0.96$h，在海面$s=0$处，扰动温度$\theta^*=-0.18$，即下降0.18℃；在$s=0.5$处，折合深度为27m，$\theta^*=-0.03$；在$s=1.0$处，即深54m，$\theta^*=0$．当$\tau=0.4$时，$t=3.82$h；$s=0$处$\theta^*=-0.60$；在$s=0.5$处，深53.9m，$\theta^*=-0.25$；$s=1.0$处深107.9m，$\theta^*=0$．当$\tau=0.6$时，$t=8.60$h，$s=0$处$\theta^*=-0.81$；$s=0.5$处深80.9m，$\theta^*=-0.41$．此外，由$r^*=0.5$处向中心或外沿，扰动温度的绝对值均变小，至$r^*=0$或$r^*\geq2.5$处，$\theta^*=0$．

扰动径向分速，如图1所示．在风暴控制无量纲时间$\tau=0.2$时，径向分速几乎不出现；而在$\tau=0.4$时，在$r^*\leq0.5$内，海表和中层有较弱的外流；到了$\tau=0.6$时外流最大值在中层为$u^*=0.96$，即0.96m/s．而表层稍小，$u^*=0.68$，在底层最大值仅为$u^*=0.06$；当$\tau=0.6$时，在$r^*=0.5$—2.5的范围内，表层和中层有较小的内流，且中层值大于表层值．例如$s=0.5$处$u^*=-0.21$．而$s=0$处，$u^*=-0.13$；表层无内流．

扰动切向分速亦如图1所示，在风暴控制开始时很弱，只有到$\tau=0.6$时比较明显．v^*的最大值出现在表层，$s=0$处最大值为$v^*=0.94$，v^*值在$r^*=0$—1.7之间均为正值．

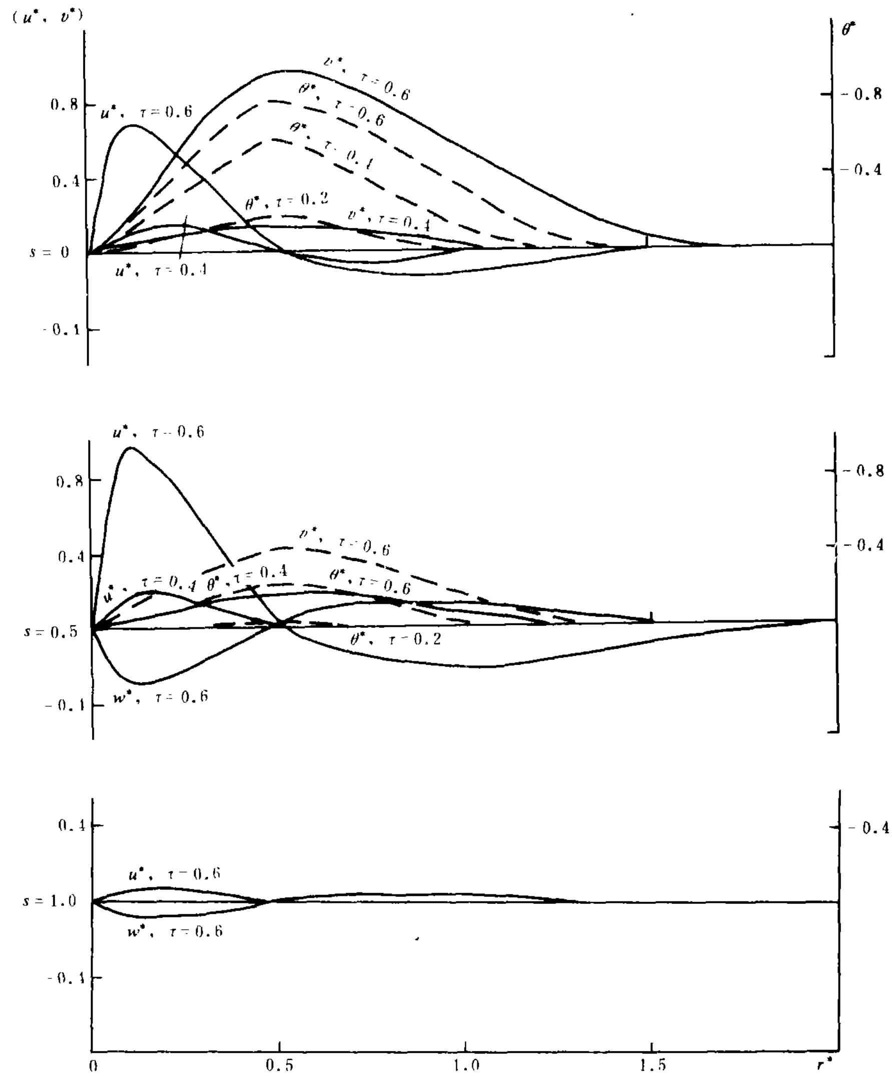

图 1　水平和铅直扰动流速以及扰动温度分布

底层切向分速为零．

扰动铅直分速如图 1 所示．在风暴开始控制时无表现．但到了 $\tau=0.6$ 时，主要存在于中层．例如 r^*　0.5, w^*　0 为上升流区；而 r^*　0.5, w^*　0 为较小的下降流区．在底层铅直分速都很小．

五、小　　结

综观以上分析，在强风暴控制下，海洋响应除海浪外均为风暴所主宰．在扰动中心，扰动温度和流速均为零，这对应于风暴中心的平静区．在风暴的涡旋区下，海洋扰动迅速

发展，从而形成与风暴涡旋相一致的、逆时针旋转的辐散上升流区．表层有较大的逆时针旋转水平分速，中层有较大的上升流速，在此辐散区的外围是较弱而宽阔的相反流区，该区呈顺时针旋转的辐合区，中层下降流较大．

此外，从分析计算的过程中可以说明，径向流主要决定于海气热交换的结果，即扰动温度的水平分布．而铅直分速则依赖于径向流速．切向流主要随风应力和柯氏力而变化．

参 考 文 献

〔1〕 Баев, В. К., Нестационарные конвективные течения руды ЦИП ВЫП., **43** (7) 1956.

〔2〕 巢纪平，层结大气中热对流发展的一个非线性分析，气象学报，**31** (1961)，3：191—204．

〔3〕 巢纪平，积云动力学，科学出版社，1964．

〔4〕 Gill, A. E., *Atmosphere Ocean Dynamics*, Academic Press, 1982.

〔5〕 Kraus, E. B., *Atmosphere-Ocean Interaction*, Oxford Univ. Press, 1972.

〔6〕 Longuet Higgins, M. S., The response of a stratified ocean to stationary and moving wind systems, *Deep sea Res.*, **12** (1965), 923—973.

〔7〕 张淮水等，Bowen 数和东中国海Bowen 数分布．青岛海洋大学学报，**18** (1988)，1：15—22．

〔8〕 Geister, J. E., Linear theory of the response of a two layer ocean to a moving hurricane, *Geophys Fluid Dyn.* **1** (1970), 249—272.

〔9〕 Price, J. F., Upper ocean response to a hurricane, *J. Phys. Oceangr.*, **11** (1981), 153—175.

〔10〕 O' Brien, J. J. and R. O. Reid, The non linear response of a two layer, baroclinic ocean to a stationary, axially symmetric hurricane, *J. Atmos. Sci.*, **24** (1967), 197—207.