1990年1月

具有潮滩移动边界的浅海环流有限元模型

张存智 杨连武 窦振兴

(国家海洋局海洋环境保护研究所,大连)

摘要

本文基于二维化浅水动力学方程组,运用伽辽金加权余量法导出计算浅水环 流的有限元公式。对计算区域采用三角单元剖分,用线性插值函数逼近流速及水 位,使用集中质量法以代替求解大型代数方程组的过程。通过建立陆水边界位置 与瞬时水位的相关关系,解决了陆水边界线移动的数学处理问题。对于运动方程 中的底摩擦项和科氏力项采用隐式格式,从而改善了模型的数值稳定性。

对皮口沿岸潮流场的数值分析,较好地再现了该海区的实际流况,从而证明 了本文所建立的环流模型具有良好的重现性。皮口港扩建工程流场预测应用实例 说明了本模型可以用来解决小尺度潮滩海区的流场预测问题,在海洋开发活动中 具有广泛的应用前景。

近年来,流体动力学数值模拟方法在我国近海的环境影响评价和海洋工程等方面得到 广泛应用,并发展成为一种有效的技术手段。但如何在模型中正确地描述陆-水边界的问题 尚未得到圆满地解决,而正确地描述边界条件无疑将对计算结果具有重要的影响。在以往 的模型中,为了使计算过程简化,往往将陆-水边界理想化为空间位置固定的固壁边界。作 为一种数学处理,在计算水域很大而潮滩面积相对很小的海区是正确的。但对于有较大 的潮间带浅滩的水域则不适当.事实上,潮汐作用下的海面升降会导致海岸或浅滩部分的 "淹没"或者"干出"于是计算区域的陆-水分界线的空间位置将随着不同的潮相而改变。 在某些海区,这种陆-水分界线的移动幅度甚至是相当大的。在这种情况下,将陆-水分界 作为固定边界处理显然是不正确的,从而导致计算结果的不真实。因此,在潮滩面积较大 的海区,潮滩移动边界的处理,成为流场模拟的技术关键。J.J.Leendertse 等[1]首先提 出了变动边界的处理方法,并成功地进行了Jamaica湾的数值模拟。D.J.Gunn等^[2]在 Milford Haven 河口潮汐数值模拟中考虑了潮滩陆水边界的移动问题。孙英兰等^[3]采用 Leendertse 模型计算了胶州湾的潮流场。但上述模型都是有限差分形式,在计算局 部潮 滩水域的环流时,边界模拟不够精确和灵活,特别在模拟海洋工程对局部环流影响时,使 用这类模型非常不便。M.Kawahara和T.Umeisu针对河道流动问题建立了动边界有限 元数值模型[4].本文则试图建立一种适合于具有大面积潮间带浅滩海域流场计算的有限

t

本文于1988年5月25日收到,修改稿于1988年12月22日收到。

元模型,以便解决海岸带开发和浅海研究中遇到的流场计算问题。本文最后以兴建的皮口 港为对象海域,展示了模型在海洋工程环境评价中的应用。

一、基本方程与定解条件

对于沿岸浅水区域,一般可做如下假定:垂直压力符合静压分布;垂向加速度与重力 相比可以忽略;水体混合均匀,海水密度为常量;不计海面气压的水平变化;区域的水平 尺度远远大于其深度尺度;则海水的流动可以由下述二维化浅水方程来描述;

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (H+h)U}{\partial x} + \frac{\partial (H+h)V}{\partial y} = 0,$$
(1)
$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} - fV$$

$$+ \frac{gU \sqrt{U^2 + V^2}}{c^2 (H+h)} - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = F_x,$$
(2)
$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + fU$$

$$+ \frac{gV \sqrt{U^2 + V^2}}{c^2 (H+h)} - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = F_y.$$
(3)

式中直角坐标系确定在平均海平面上, U, V分别为 x 和 y 方向上的深度平均速度分量; h代表自由面高度, H为平均海面深度; F_x , F_y 为 x, y 方向上的风应力分量; ε 为水平涡 动粘滞系数; c 为Chezy系数, $c = \frac{1}{n} (H + h)^{\frac{1}{6}}$, n 为Manning系数; f是科氏参数, $f = 2\omega \sin\varphi$, ω 是地转角速度, φ 为地理纬度; ε 为重力加速度; t 为时间变量.

初始条件规定在计算起始时刻(即1=0)h,U,V为已知值,一般可从静水起动, 即h,U,V等于零。

对于固体边界,一般使用含边界阻力的自由滑移或准滑移条件,即在陆 - 水边界(闭 边界)上规定法向速度为零,

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0, \qquad (4)$$

而在切向方向上考虑边界层阻力,一般地,这个力与底摩擦力比较很小,往往被忽略, 在水-水边界(开边界)上,以给定的水位条件控制,即

$$h_{\text{open}}(t) = \Theta M \otimes \mathcal{B}_{\bullet}$$
 (5)

根据伽辽金加权余量法,我们将方程(1)一(3) 写成加权剩余形式:

$$\int_{\Omega} \delta h \frac{\partial h}{\partial t} \, \mathrm{d} \, \Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \delta h}{\partial x} (H + h) U + \frac{\partial \delta h}{\partial y} (H + h) V \right] \, \mathrm{d} \, \Omega$$

$$= -\int_{\Gamma} \delta h(H + h) \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} d\Gamma, \qquad (6)$$

$$\int_{\Omega} \delta U \left[\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{gU \sqrt{U^{2} + V^{2}}}{c^{2} (H + h)} + g \frac{\partial h}{\partial x} - fV - F_{x} + \varepsilon \left(\frac{\partial \delta U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \delta U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma} \delta U \frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{n}} d\Gamma, \qquad (7)$$

$$\int_{\Omega} \delta V \left[\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{gV \sqrt{U^{2} + V^{2}}}{c^{2} (H + h)} + g \frac{\partial h}{\partial y} + fU - F_{y} + \varepsilon \left(\frac{\partial \delta V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \delta V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma} \delta V \frac{\partial V}{\partial \overrightarrow{n}} d\Gamma. \qquad (8)$$

式中, Ω代表积分区域, Γ为区域的边界. 代入边界条件, 方程(6)-(8)可以写成下列形式:

$$\int_{\Omega} \delta h \frac{\partial h}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \delta h}{\partial x} (H + h) U + \frac{\partial \delta h}{\partial y} (H + h) V \right] d\Omega = 0 , \qquad (9)$$

$$\int_{\Omega} \delta U \left[\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{gU \sqrt{U^2 + V^2}}{c^2 (H+h)} + g \frac{\partial h}{\partial x} - fV \right]$$

$$-F_{x} + \varepsilon \left(\frac{\partial \delta U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \delta U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y}\right) d\Omega = 0, \qquad (10)$$

$$\int_{\Omega} \delta V \left[\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{g V \sqrt{U^{2} + V^{2}}}{c^{2} (H + h)} + g \frac{\partial h}{\partial y} + fU$$

$$-F_{y} + \varepsilon \left(\frac{\partial \delta V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \delta V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right) d\Omega = 0 .$$
(11)

将计算区域Ω剖分成m个三角单元,对U,V,h采用线性插值函数逼近

$$U = N_a U_a, \qquad V = N_a V_a, \qquad h = N_a h_a, \qquad (12)$$

Na是线性插值函数, Ua, Va和ha分别是三角形单元顶点上的x, y方向的速度分量和水位值.

记时间步长为∆1, 上标 *n* 表示第 *n* 个时间步的节点值,有限元格式写成下列形式: 第一步:

$$\overline{A}_{a\beta}h_{\beta}^{n+\frac{1}{2}} = \widetilde{A}_{a\beta}h_{\beta}^{n} + E_{a}^{n}, \qquad (13)$$

$$= \stackrel{n}{A}_{a\beta} U^{n+\frac{1}{2}}_{\beta} - f \overline{A}_{a\beta} V^{n+\frac{1}{2}}_{\beta} = \overline{A}_{a\beta} U^{n}_{\beta} - C^{n}_{a},$$
 (14)

2

$$\overline{A}_{a\beta}V_{\beta}^{n+\frac{1}{2}} + f\overline{A}_{a\beta}U_{\beta}^{n+\frac{1}{2}} = \overline{A}_{a\beta}V_{\beta}^{n} - D_{a}^{n} .$$
(15)

其中

4

$$A_{\alpha\beta} = \int N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega, \qquad (16)$$

Aas是集中质量矩阵,

$$\overline{A}_{a\beta} = \begin{cases} 0, & a \neq \beta, \\ A_a, & a \neq \beta, \end{cases}$$
(17)

Aa为第 a 节点的集中质量区域的面积,如图 1.

$$\overset{=n}{A_{\alpha\beta}}=e_{\alpha\,j}^{n}\overline{A}_{\beta\beta},\qquad(18)$$

$$e_{aj}^{n} = \begin{cases} 0, & a \neq j \\ 1 + \frac{\Delta t g}{2c^{2}} \left(\frac{\sqrt{U^{2} + V^{2}}}{H + h} \right)_{a}^{n}, & a = j, \end{cases}$$
(19)

$$A_{a\beta} = \lambda \overline{A}_{a\beta} + (1 - \lambda) \cdot A_{a\beta}, \qquad (20)$$

\lambda 为稳定因子, $0 \le \lambda \le 1$.



$$C_{a}^{n} = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \left(N_{a} N_{\beta} U_{\beta}^{n} \frac{\partial N_{r}}{\partial x} \cdot U_{r}^{n} + N_{a} N_{\beta} V_{\beta}^{n} \frac{\partial N_{r}}{\partial y} \cdot U_{r}^{n} \right) d\Omega$$

$$+ \frac{\Delta t g}{2} \int_{\Omega} N_{a} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} h_{\beta}^{n} d\Omega + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_{a}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} U_{\beta}^{n} + \frac{\partial N_{a}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} U_{\beta}^{n} \right) d\Omega, \qquad (21)$$

图1 集中质量区域面积(阴影部分)

$$D_{a}^{n} = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \left(N_{a} N_{\beta} U_{\beta}^{n} \frac{\partial N_{r}}{\partial x} V_{r}^{n} + N_{a} N_{\beta} V_{\beta}^{n} \frac{\partial N_{r}}{\partial y} V_{r}^{n} \right) d\Omega$$
$$+ \frac{\Delta t g}{2} \int_{\Omega} N_{a} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} h_{\beta}^{n} d\Omega + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_{a}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} V_{\beta}^{n} + \frac{\partial N_{a}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} V_{\beta}^{n} \right) d\Omega, \qquad (22)$$

$$E_{a}^{n} = \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial N_{a}}{\partial x} N_{\beta} \left[(H+h)U \right]_{\beta}^{n} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_{a}}{\partial y} N_{\beta} \left[(H+h)V \right]_{\beta}^{n} \mathrm{d}\Omega \right) .$$
(23)

第二步:

$$\overline{A}_{a\beta}h_{a}^{n+1} = \widetilde{A}_{a\beta}h_{\beta}^{n} + E_{a}^{n+\frac{1}{2}}, \qquad (24)$$

$$\overset{=n+\frac{1}{2}}{A_{a\beta}} U^{n+1}_{\beta} - f \overline{A_{a\beta}} V^{n+1}_{\beta} = \overline{A_{a\beta}} U^{n}_{\beta} - C^{n+\frac{1}{2}}_{a} ,$$
 (25)

$$\overset{=n+\frac{1}{2}}{A_{\alpha\beta}} V_{\beta}^{n+1} + f \overline{A_{\alpha\beta}} U_{\beta}^{n+1} = \overline{A_{\alpha\beta}} V_{\beta}^{n} - D_{a}^{n+\frac{1}{2}},$$
 (26)

其中, $E_a^{n+\frac{1}{2}}$, $C_a^{n+\frac{1}{2}}$, $D_a^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $A_{a\beta}^{a+\frac{1}{2}}$ 的表达式可分别将式 (18) — (23) 中的 n 改为 n + $\frac{1}{2}$, $\frac{\Delta t}{2}$ 改成 Δt 即可得到.

在以往的有限元公式中,对运动方程中的底摩擦项和科氏力项的处理,一般都取显式 格式(如M.Kawahara等)^[4].这样做固然可以简化计算过程,但其数值稳定性效果不 够理想.本研究在有限元公式的推导过程中,对底摩擦项和科氏力项的处理采用了隐式格 式[详见式(14),(15),(18)和(19)等],经过数值试验表明,这种处理方式很容易获 得数值上的稳定性.另外,在上述有限元公式中,由于采用集中质量法,避免了求解大型 代数方程组,简化了运算过程,在不影响计算精度的前提下,可大量节省内存、缩短机时, 从而使本方法便于在小型机或微机上处理.

三、动边界的处理

在河口、潮滩等类区域的流场计算中,如何正确地模拟边界线的移动,也就是说如何 确定海滩在何时何处被海水所覆盖或者暴露出的问题,是模拟计算的技术关键。我们熟知 这样的事实,即海滩在涨潮期间逐渐淹没,在落潮期间逐渐干出,陆-水边界线也便随之 前进或者后退,即边界线的移动取决于潮位的变化,据此,我们建立边界位置与瞬时水深 D = H + h的相关关系。当D < 0时,潮滩干出,反之,潮滩被淹没。这样,我们便可以 判定某一单元在某瞬时是"干出"还是"淹没"的。如果在某一单元上的三个节点中有两 个已判定是干出的,那么就将这一单元从计算域中去掉。同时,我们还必须判定哪一个单元 是位于陆-水边界线上的。如果某单元上有一个节点干出,便说明这一单元是在边界上, 此时,将干出节点的水深值置零,并且不参加运算,而将其他两个节点的流速分量均置为 零值,并且包括在计算域中。然后,利用修改后的新的边界线进行下一步迭代循环。对于 原先干出的节点是否被淹没也需要加以判定,其判定的过程与"干出"的判定过程相反。 如果判定某(干出的)节点或单元已被淹没,则该点(或单元)重新加入计算。

在实际计算中,当水深 D < 0 时,描述流体运动的动量方程和连续方程便失去意义.因此,通常选用一个大于零的数值作为判定值D₀(例如D₀=0.1 m等等).当D < D₀,认为 节点干出.D₀的选取与水位升降的速率、地形及时间步长有关.为了保持流体 质 量的 守 恒,干出的节点值 h 用一维数组贮存起来,使干出的节点仍保留一层海水,其厚度为D₀. 当该点在涨潮时被淹没时,则 h 取保留值.

图 2 说明了上述活动边界的处理过程。将单元记为①,②,…,节点记为1,2,…。

1. 单元①和单元②的所有节点都干出,故在计算域中去掉,这些节点号是1,2和11 及11,10和1.

2. 单元③的节点号是2.3和12,单元④的节点号是12,11和2,这两个单元被包括在计算域内,并规定在节点2.3、11和12上的两个流速分量为零,规定节点2和11上的水位值等于D₀.



图 2 活动边界示意图

连线以内的水域,最大水深不超过3米. 根据现场勘察,高潮时,整个海滩被海水覆盖, 低潮时大部分海滩干出,大潮期间干出范 围可达马牙岛。图3中所示零米等深线基 本上勾划出了潮滩的干出范围。本文所要 计算的是平岛至马牙岛连线以内的海区。 可以看出,退潮后潮滩干出的面积要大于 海水覆盖的面积。显然,像这样的海区, 欲达到重现该海区的实际流场的目的,关 键的问题便是动边界的处理问题。

(一) 数值计算输入条件

(1) 计算范围取自平岛到马牙岛连 线以内的水域。将计算区域分为三角形单元, 有限元网格见图4。整个区域剖分成443个单 元,232个节点,最小网格尺寸为80米。

(2) 水深,由海图水深订正到平均 海平面深度。

(3)时间步长△t = 12秒.

(4) 科氏参数, 按当地地理纬度取 $\varphi = 39$ '计算.

(5) 开边界水位:用自记水位计同时在马牙岛和平岛进行连续水位观测,并以潮汐 调和分析所得的调和常数输入,其形式为

$$h = h_i \cos\left(\sigma_i t - g_i\right),$$

其中, h_i , g_i 和 σ_i 分别代表第 *i* 分潮的振幅、迟角和频率,本计算仅以 M_2 分潮为例,故 i = 2.同时,调整迟角的值,使 $h_{i=0} = 0$,这样可以使整个计算域的潮波系统在起始时

3. 单元 5 的节点号为 3、 4 和 13, 单元
 6 的节点号为 13, 12 和 3, 这两个单元被包括
 在计算域中。

四、应用实例分析

为了确证上述有限元模型的适用性和可靠 性,我们选取皮口港域的浅滩海区实施了数值 试验。

皮口港位于辽东半岛的东岸(图3),里长 山水道的西北侧,该处海岸为东北一西南走向, 海滩坡度平缓,且水深很浅,自平岛至马牙岛



6





时刻便同步起动,可使初始阶段的非线性振荡很小。数值实验表明,实时计算到第3小时, 初始振荡即告消失,全域进入稳定的波动状态。

(7) 不考虑风和其他外力, $F_x = F_y = 0$.

(8) 根据数值试验确定全域 $D_0 = 0.1$ 米.

(二) 计算结果分析

皮口沿岸的潮汐运动直接受制于北黄海半日潮驻波系统。据实测资料分析,皮口沿岸 的潮汐类型属于正规半日潮,M2分潮占优势。海流观测也显示了皮口海区的潮流属于正规 半日潮流。本文对M2分潮进行了数值模拟,图5-8展示了皮口海区M2分潮流的计算结 果。以最大落潮流、低潮憩流、最大涨潮流和高潮憩流时的四个流场,概述潮流的循环过程。

从图中可以看出皮口沿岸潮流场的基本特征 · 高潮时 (图 8),流动方向基本平行于海 岸,流向西南,沿平岛至马牙岛一线流速较大,且向岸递减 · 在马牙岛至岸边一带,流速 很小,此时全域为潮水所覆盖 · 高潮过后为落潮过程,全域流向按逆时针方向旋转,逐步 发展成为垂直于海岸的向海流动,并达到最大落潮流速值 (图 5),流速分布依然是自深水 . 向浅水递减 · 随着水位连续下降,干滩面积逐渐增大 · 在低潮时刻,牛心岛以内潮滩基本 干出 · 牛心岛附近水深不足半米,此时落潮流最小,且方向一致流向东北 (图 6),此刻过 后,进入涨潮阶段,流速逐渐增大,流向转为一致的向岸流动,随着水位的上升,干滩面 积逐渐缩小 (图 7).

(三) 模型验证

为了说明模型的有效性,这里将计算结果与实测资料进行了对比·表1给出了在几个 测流点的M2分潮流的计算值与实测值的比较·不难看出,计算结果与实测资料十分接近·



图 5 皮口沿岸潮流场 (最大落潮流)



图 6 皮口沿岸潮流场 (低潮憩流)



图 7 皮口沿岸潮流场 (最大涨潮流)



图 8 皮口沿岸潮流场(高潮憩流)

÷

图 9 绘出了陆-水边界线位置在一个潮周期内的变化过程。在低潮时 (1 = 3 时),潮 滩大部干出,此时陆水分界线平行于海岸,其空间位置与实际低潮线很靠近,模拟计算结

果重现了潮滩的干出和淹没过程.

表 1 流场计算结果与实测值的对比

项 目	1号站		2号站		3号站		4 号站	
	计算	实测	计算	实测	计算	实测	计算	实测
	30	31.3	22	25.7	25	25.5	22.0	22.5
最小流速 (cm/s)	17	16	15	17.5	17	18.5	12.5	13.4
主流方向(322	335	33.0	34 9	33 5	34 7	320	315



(四) 应用实例

皮口港扩建工程计划将引堤自皮口海岸修 至牛心岛,在工程可行性研究中,需要预测引 堤建成后港域流场的变化情况。作者运用本文 的有限元模型进行了数值预测,图10-13展示 了皮口港扩建工程实体引堤方案流场预测结果。 将这一结果与图5-8(未修堤)的结果相比 较,便可以清晰地看出工程前后港域流场的变 化情况,进而对工程设施的环境动力作用作出 评价。



图10 皮口沿岸流场预测(最大落潮流)



图11 皮口沿岸流场预测(低潮憩流)



图12 皮口沿岸流场预测(最大涨潮流)



图13 皮口沿岸流场预测(高潮憩流)

这一实例可以说明,本研究所建立的潮滩移动边界环流模型,可以精确地模拟浅水环 流,因而为许多海洋工程预测问题提供了有效的数值手段,这是通常的差分方法所难以实 现的。

五、小 结

本文所建立的浅滩海域动边界有限元模型,对计算区域采取三角形单元剖分,用线性 插值函数逼近流速及水位。使用集中质量法以代替求解大型方程组,从而简化了计算过程。 通过陆水边界位置与瞬时水位建立相关关系,解决了陆水边界线移动的数学处理问题。对 于运动方程中的底摩擦项和科氏力项的处理采用隐式格式,从而改善了模型的数值稳定性。

皮口沿岸流场的数值分析,较好地再现了本海区的实际流况。为了进一步证实本模型 的有效性,今后还需在一些较大尺度的海域施行数值实验。

潮滩边界的处理具有重要的实际意义。我国漫长的海岸线和众多的河口区域,遍布大面积的潮滩。而潮间带及河口区域又是海岸带开发的主要场所。由于工程和环境等方面的 生产和科研的需要,将遇到许多小尺度潮滩海区流场预测问题。本文提供的具有移行边界 的浅海环流有限元模型不仅有理论和方法学上的意义,而且在海洋开发活动中具有广泛的 实际应用前景。

13

参考文献

- (1) Leendertse J.J. and E.C. Gritton, A water-quality simulation model for well mixed estuaries and coastal seas, Vol. [], Computation procedures, R-708-NYC, July 1971.
- [2] Gunn, D.J. and O.Y enigun, Modelling of tidal motion in shoaling waters The estuary of Milford haven, Estuarine, Coastal and Shelf Science, 21 (1985), 337-356.
- 〔3〕 孙英兰、陈时俊,胶州湾环流和污染扩散 数值 模 拟 Ⅳ,胶州湾变边界模型,山东海洋学院学报, 17 (1987),1: 1-25。
- (4) Kawahara, M. and T. Umeitsu, Finite element method for moving boundary problems in river flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 6 (1986), 365-386.

〔5〕J.J.康纳、C.A. 渤莱皮埃著,吴望一译,流体流动的有限元法,科学出版社, 1981.