第11卷 第2期 海 洋 学 报 Vol.11, No.2
1989年3月 ACTA OCEANOLOGICA SINICA March, 1989

一种变截面河口中潮位与潮流相位关系的探讨

杜 勇 叶安乐 陈宗镛

（青岛海洋大学物理海洋与海洋气象系）

摘 要

根据一维线性潮波方程导出了变截面河口中最大潮流与高潮位之间的相位关系，并对其进行了讨论. 其中，河口宽度取为$B=B_0e^{-bx}$深度$h=$常数. 结果表明，在这种变截河口中纯前进潮波的潮流与潮位之间的相位差取决于不同的h、b和频率σ，可以在$0-\pi/2$之间变化. 而对这种河口中考虑了反射波效应之后的合成潮波，在靠近外海的相当一段距离内也可能出现潮流和潮位之间的相位差小于$\pi/4$的情况，这取决于入射波的潮流与潮位之间的相位差以及反射波的衰减情况. 因此，在变截面河口中，仅仅根据潮流与潮位之间的相位差接近于零或者接近于$\pi/2$来判定潮波是前进波型还是驻波型是值得商榷的. 最后，本文提出了一种判定变截面河口中潮波类型的方案.

在研究河口中潮波动力学时，确定潮波的基本属性（前进波或驻波）是十分重要的. 在以往的研究中，许多研究者根据最大潮流与高潮位之间的相位差$r(x)$来判定潮波是驻波还是前进波. 当$r(x)$接近于零时，一般认为潮波是以前进波为主. 而当$r(x)$接近于$\pi/2$时，则一般认为是以驻波为主（例如文献(1)）. 这实际上是沿用了经典的前进波和驻波的性质. 按照经典的波动理论，在无摩擦且河口的宽度和深度都不变的情况下，在其中传播的前进潮波的$r(x)=0$，而在其中形成的驻波的$r(x)=\pi/2$. 本文的研究结果表明，在变截面河口中，纯前进潮波的$r(x)$可以在$0-\pi/2$之间变化，这取决于地形因子和波动频率等参量. 由此可见，经典波动理论中关于确定波动属性的结论，不能简单地推广用来判定变截面河口或有摩擦的不变截面河口中潮波的属性. 本文提出了一种确定变截面河口中潮波类型的方案.

一、基本方程组及其相位关系表达式

一维化线性潮波方程组为

本文于1987年8月2日收到，修改稿于1988年3月20日收到.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x}-fu \quad , \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Bhu)=-B\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \tag{2}$$

式中，x是从湾口起算的距离；指向上游为正，u是河口中截面平均流速；ζ是相对于平均海面的潮位变化；h=常数，是河口深度；$B=B_0e^{-bx}$是任意点x处的河口宽度，B_0是$x=0$处的河口宽度；$f=8k/(3\pi h)U_0$是线性摩擦系量，U_0是河口中的特征流速，k取0.002—0.0025.

根据文献〔2〕，方程(1)、(2)的解为

$$u=Re\left[A_1e^{\alpha_{11}x+i(\sigma t+\alpha_{22}x)}+A_2e^{\alpha_{21}x+i(\sigma t-\alpha_{22}x)}\right], \tag{3}$$

$$\zeta=Re\left[B_1e^{\alpha_{11}x+i(\sigma t+\alpha_{22}x)}+B_2e^{\alpha_{21}x+i(\sigma t-\alpha_{22}x)}\right], \tag{4}$$

其中

$$A_j=A_{j1}-A_{j2}, \qquad B_j=B_{j1}-iB_{j2}, \qquad j=1,2$$

是复常数，由边界条件确定.

$$\begin{aligned}\alpha_{j1}&=\frac{b}{2}+(-1)^{j-1}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(b^2-\frac{4\sigma^2}{gh}\right)^2+\left(\frac{4\sigma f}{gh}\right)^2}+\left(b^2-\frac{4\sigma^2}{gh}\right)\right]}, \quad j=1,2\\ \alpha_{22}&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(b^2-\frac{4\sigma^2}{gh}\right)^2+\left(\frac{4\sigma f}{gh}\right)^2}-\left(b^2-\frac{4\sigma^2}{gh}\right)\right]},\end{aligned} \tag{5}$$

为了求出潮流与潮位的相位关系，我们对式(3)、(4)作进一步处理．令

$$\zeta=E_1(x)\cos[\sigma t+F_1(x)]+E_2(x)\cos[\sigma t-F_2(x)], \tag{6}$$

再令

$$\zeta=G(x)\cos[\sigma t-K(x)], \tag{7}$$

将式(6)和式(7)相比

$$G(x)=[(E_1\cos F_1+E_2\cos F_2)^2+E_2\sin F_2-E_1\sin F_1)^2]^{1/2}, \tag{8}$$

$$K(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{E_2\sin F_2-E_1\sin F_1}{E_1\cos F_1+E_2\cos F_2}\right) \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}&E_j=H_je^{\alpha_{j1}x}, \qquad F_j=\alpha_{22}x+(-1)^jg_{Bj},\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j=1,2\\ &H_j=(B_{j1}^2+B_{j2}^2)^{1/2}, \qquad g_{Bj}=\operatorname{arctg}\left(\frac{B_{j2}}{B_{j1}}\right),\end{aligned} \tag{9'}$$

H_j和g_{Bj}是$x=0$处的潮位调和常数．$j=1$为反射波，$j=2$为入射波．同样令

$$u=U(x)\cos(\sigma t-P(x)),\tag{10}$$

则

$$U(x)=[(M_1\cos L_1+M_2\cos L_2)^2+(M_2\sin L_2-M_1\sin L_1)^2]^{1/2},\tag{11}$$

$$P(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{M_2\sin L_2-M_1\sin L_1}{M_1\cos L_1+M_2\cos L_2}\right).\tag{12}$$

其中

$$M_j=D_j e^{\alpha_{j1}x}\qquad L_j=\alpha_{22}x+(-1)^j g_{Aj},$$
$$j=1,2\tag{13}$$
$$D_j=(A_{j1}^2+A_{j2}^2)^{1/2},\quad g_{Aj}=\operatorname{arctg}\left(\frac{A_{j2}}{A_{j1}}\right),$$

显然，D_j和g_{Aj}是河口出口处（$x=0$）的潮流调和常数，$j=1$为反射波，$j=2$为入射波.

将式（7）和（10）代入连续方程

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=hbu-h\frac{\partial u}{\partial x},\tag{14}$$

并整理，得到

$$\operatorname{tg}[K(x)]=\frac{\left(bU-\frac{dU}{dx}\right)\cos P+U\frac{dP}{dx}\sin P}{U\frac{dP}{dx}\cos P-\left(bU-\frac{dU}{dx}\right)\sin P},\tag{15}$$

潮流与潮位在任意点x处的相位差为

$$r(x)=[\sigma t-P(x)]-[\sigma t-K(x)]=K(x)-P(x),$$

从而

$$K(x)=r(x)+P(x),\tag{16}$$

将式（16）代入式（15），整理得到

$$\operatorname{tg}[r(x)]=\frac{bU-\frac{dU}{dx}}{U\frac{dP}{dx}},\tag{17}$$

由式（11）和（12）可求出

$$\frac{dU}{dx}=\frac{1}{U}\{\alpha_{11}M_1^2+\alpha_{21}M_2^2+M_1M_2[b\cos(L_1+L_2)-2\alpha_{22}\sin(L_1+L_2)]\},\tag{18}$$

$$\frac{dP}{dx}=\frac{1}{U^2}[\alpha_{22}(M_2^2-M_1^2)+(\alpha_{21}-\alpha_{11})M_1M_2\sin(L_1+L_2)],\tag{19}$$

将式（18）、（19）代入式（17），我们得到用潮流调和常数表示的$r(x)$的最后表达式

$$\operatorname{tg}[r(x)]=\frac{\alpha_{21}M_1^2+\alpha_{11}M_2^2+M_1M_2[b\cos(L_1+L_2)+2\alpha_{22}\sin(L_1+L_2)]}{\alpha_{22}(M_2^2-M_1^2)+(\alpha_{21}-\alpha_{11})M_1M_2\sin(L_1+L_2)}.\tag{20}$$

二、潮流与潮位相位关系的讨论

（一） 纯前进潮波的相位关系

如果河口截面随距离的变化是缓慢的(即 b 不大)，加上由于海底摩擦的影响，那么进入河口的入射波的反射波基本上可以忽略，至少靠近外海的一段是如此．讨论这种纯入射波中潮位与潮流的相位关系时，可在式（20）中，令$M_1=0$（即不考虑反射波）并利用式（5），得到纯入射波的潮位与潮流的相位差$r(x)$的表达式

$$\mathrm{tg}r=\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}}=\frac{b+\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(b^2-\frac{4\sigma^2}{gh}\right)^2+\left(\frac{4\sigma f}{gh}\right)^2}+\left(b^2-\frac{4\sigma^2}{gh}\right)\right]}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(b^2-\frac{4\sigma^2}{gh}\right)+\left(\frac{4\sigma f}{gh}\right)^2}-\left(b^2-\frac{4\sigma^2}{gh}\right)\right]}},\qquad(21)$$

由式（21）可知，在线性摩擦系量f=常数的情况下，r与x无关．下面分几种情况对式（21）进行讨论

（1） $b^2\geqslant\frac{4\sigma^2}{gh}$时

此时一般地说，由于$\alpha_{11}>\alpha_{22}$，所以$\infty>\mathrm{tg}r>1$，从而$\pi/2>r>\pi/4$；但当$f=0$时，$\mathrm{g}r=\infty$，从而$r=\pi/2$；又当f很大时，$\mathrm{tg}\to1$，从而$r\to\pi/4$．因此，这时对于变截面河口中的前进潮波，其潮流与潮位的相位差r在$\pi/4$到$\pi/2$之间变化．这与宽度不变的河口和沟渠中的情况是不同的．按照经典理论[3]，在宽度不变的沟渠中，考虑摩擦的情况下，前进潮波的潮流与潮位的相位差r只能在$0-\pi/4$之间变化．在$b^2\geqslant\frac{4\sigma^2}{gh}$且$f=0$时，$\alpha_{22}=0$．由于$\alpha_{22}$是潮波的波数，可以看出，这时的前进潮波已转化为驻振荡，而$f\to\infty$时，$r\to\pi/4$．此时与宽度不变的沟渠中的情况是一致的．因为摩擦效应极大时，变窄效应被应掩盖了．所以，变截面和不变截面的情况一致，$r\to\pi/4$．

可见，只要满足条件：$b^2\geqslant\frac{4\sigma^2}{gh}$，则无论考虑摩擦效应与否，都有$\pi/2\geqslant r\geqslant\pi/4$成立．而在这种情况下，$r<\pi/4$是不会出现的．

（2） $b^2<\frac{\sigma^2}{gh}$时

在式（21）中，令$\mathrm{tg}r=1$，可以得到

$$b^2=\frac{2\sigma^3}{gh(f+\sigma)},\qquad(22)$$

由式（22），可以推知：1）当$b^2>\dfrac{2\sigma^3}{gh(f+\sigma)}$时，$\mathrm{tg}r>1$，$\pi/2>r>\pi/4$；2）当$b^2=\dfrac{2\sigma_3}{gh(f+\sigma)}$时，$\mathrm{tg}r=1, r=\pi/4$；3）当$b^2<\dfrac{2\sigma^3}{gh(f+\sigma)}$时，$\mathrm{tg}r<1$，$\pi/4>r>1$；这表明$b^2<\dfrac{4\sigma^2}{gh}$时，取决于不同的地理条件$b$、$h$和不同频率$\sigma$以及摩擦效应的大小，$r$值可以在$0—\pi/2$之间变化．当$f=0$时，式（22）变为$b^2=\dfrac{2\sigma^2}{gh}$。当$f\to\infty$时，$\mathrm{tg}r=1$，$r=\pi/4$；和$b^2\geqslant\dfrac{4\sigma^2}{gh}$的情况一致。

综上所述，得出如下结论。

当$b^2\geqslant4\sigma^2/(gh)$或者$\dfrac{4\sigma^2}{gh}>b^2\geqslant2\sigma_3/[gh(f+\sigma)]$时，不等式$\pi/2\geqslant r\geqslant\pi/4$都成立．而在其他情况下，则有$\pi/4>r\geqslant0$．由此表明，变截面河口中潮流与潮位的相位关系，在很大程度上取决于地形参量b、h以及波动频率和摩擦系量的大小．只要这些参量满足一定的关系，则纯前进潮波中潮流与潮位的相位差也可以满足不等式$\pi/2\geqslant r\geqslant\pi/4$．而在截面不变的河口（$b=0$）中，则不会出现这种情况．

（二）考虑反射波效应后合成潮波的潮位与潮流的相位关系

以往有些研究者[1,4]认为，考虑了反射波效应之后的合成潮波中潮位与潮流的相位差r一定是接近于$\pi/2$的．实际上，在变截面河口和考虑摩擦的非变截面河口中的情况并非如此简单．下面我们选择一种特殊情况来讨论这个问题．首先在变截面河口中$x=x_0$处，设有一水坝，使潮波产生全反射（$u|_{x=x_0}=0$），这时由式（11），我们得到$x=0$处潮流所应满足的条件

$$D=D_2e^{(\alpha_{21}-\alpha_{11})x};\qquad g_{A_2}-g_{A_1}=\pi-2\alpha_{22}x_0. \tag{23}$$

将式（23）代入式（20），得到

$$\mathrm{tg}r=\frac{b\,\mathrm{ch}[\alpha(x_0-x)]+\alpha\,\mathrm{sh}[\alpha(x_0-x)]+2\alpha_{22}\sin[2\alpha_{22}(x_0-x)]-b\cos[2\alpha_{22}(x_0-x)]}{2\alpha_{22}\,\mathrm{sh}[\alpha(x_0-x)]-\alpha\sin[2\alpha_{22}(x_0-x)]}, \tag{24}$$

其中

$$\alpha=\alpha_{11}-\alpha_{21}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(b^2-\frac{4\sigma^2}{gh}\right)^2+\left(\frac{4\sigma f}{gh}\right)^2}+b^2-\frac{4\sigma^2}{gh}\right]}, \tag{24'}$$

式（24）代表了变截面河口中产生全反射时合成潮波中潮位和潮流相位差r的表达式．在式（24）和式（24′）中令$b=0$时，式（24）便代表不变截面河口中的相应r值．由式(24)可知，这种情况下的r值将随（x_0-x)的改变而变化．这与纯前进潮波中r值不随x而变是不同的．所以，合成潮波中的r值的分布，除与地形、频率等参量有关外，一定程度取决于该处与水坝之间的距离（x_0-x）的大小．为了讨论这种情况下r值的变化，我们计算

了不同河口中的几种情况下的纯前进潮波与考虑了反射波效应的合成潮波的 r 值(表 1)．其中，将纯前进潮波的r值记为r_I，合成潮波的r值记为r_C．河口长度(从0到x_0)都为100千米，每10千米计算一个值．河口深度 h 为 11 米，$\sigma=\sigma_{M_2}=1.4052\times10^{-4}$/秒，$g=9.8$米/秒^2，特征流速取为$\overline{U}_0=1$米/秒．

（1）　取$b=0$，$k=0.002$，代表截面不变的河口中考虑摩擦的情况．

（2）　取$b=0$，$k=0$，代表截面不变的河口中不考虑摩擦的情况．

（3）　取$b=2.85\times10^{-5}$/米，$k=0.002$，这种变截面河口的形状基本符合我国杭州湾的情况．

（4）　取$b=2.85\times10^{-5}$/米，$k=0$，这相当于讨论杭州湾中无摩擦的情况．

（5）　取$b=\frac{1}{2}\times2.85\times10^{-5}$/米，$k=0.002$，代表考虑摩擦时，一种变窄率为杭州湾的变窄率的$\frac{1}{2}$的河口．

（6）　取$b=\frac{1}{2}\times2.85\times10^{-5}$/米，$k=0$，和（5）的河口形状一样，但不考虑摩擦效应．

表1　前进潮波（r_I）与合成潮波（r_C）的r值之沿程变化〔相位差（°）〕

河口类型	波型	距离 (km) 湾顶 0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$b=0$, $k=0.002$	r_I	23.8	23.8	23.8	23.8	23.8	23.8	23.8	23.8	23.8	23.8	23.8
	r_C	90	89.6	88.4	86.3	82.9	78.1	71.4	62.4	51.3	39.1	27.9
$b=0$, $k=0$	r_I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	r_C	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
$b=2.85\times10^{-5}$, $k=0.002$	r_I	68.9	68.9	68.9	68.9	68.9	68.9	68.9	68.9	68.9	68.9	68.9
	r_C	90	89.7	88.8	87.6	86.1	84.5	82.8	81.1	79.3	77.6	76.1
$b=2.85\times10^{-5}$, $k=0$	r_I	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
	r_C	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
$b=\frac{1}{2}\times2.85\times10^{-5}$, $k=0.002$	r_I	54.4	54.4	54.4	54.4	54.4	54.4	54.4	54.4	54.4	54.4	54.4
	r_C	90	89.6	88.6	87.0	84.8	82.0	78.6	74.6	70.1	65.1	59.8
$b=\frac{1}{2}\times2.85\times10^{-5}$, $k=0$	r_I	31.8	31.8	31.8	31.8	31.8	31.8	31.8	31.8	31.8	31.8	31.8
	r_C	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

由表1可以得出结论：

1）考虑摩擦情况下的合成潮波的r_c值明显地随着（x_0-x）变化，并且越靠近湾顶r_c值越接近于90°，越靠近湾口r_c值越接近于纯入射波的r_I值.

2）当不考虑摩擦效应时，合成潮波r_c值恒等于90°与（x_0-x）无关.

3）从第（4）种情况来看，若在杭州湾中不考虑摩擦效应，则入射波转化为驻振荡，波速为无穷大，从而$r_I=90°$，显然也有$r_c=90°$.

以上结论表明，一旦考虑了摩擦效应，则反射波从湾顶向湾口迅速衰减．仅在湾顶处反射波的大小与入射波的大小基本接近．所以靠近湾顶处形成较明显的驻波．但随着反射波的衰减，到湾口处反射波的大小与入射波相比几乎可以忽略．因此这时合成潮波中的主要成份为入射波．从而导致了在湾口附近$r_c \approx r_I$．若不考虑摩擦效应，则在变截面河口中相同地点的入射波的增长率与反射波的衰减率是相等的，从而在每个点上都有反射波高等于入射波高．这时形成纯驻波．因此r_c恒等于90°，而与其它因子无关.

三、确定变截面河口中潮波主要类型的一种方案

通过以上关于前进潮波和考虑了反射波效应的合成潮波的潮流与潮位相位关系的讨论，我们得出结论，当r值严格等于90°时，潮波一定是驻波或驻振荡．而r值接近于90°，则不能断定是前进潮波还是驻立潮波．因为纯前进潮波和考虑了反射波效应之后的合成潮波的r值都可以在45°—90°之间变化．另外，当$r<45°$时，我们也不能断定这时一定是纯前进潮波．因为合成潮波在接近湾口的很长一段距离内，也可能出现$r_c<45°$的情况，这取决于入射波的r_I值和反射波的衰减如何．因此，潮流和潮位之间的相位差不能简单地作为确定潮波类型的依据，在变截面河口中尤其是这样．需要指出的是，在考虑摩擦的情况下，合成潮波与纯前进潮波的明显区别是，前者的r_c值随着x有明显变化，而后者的r_I值则几乎与x无关，在整个河口中接近均匀一致.

在目前还无法从实际资料中分离出分潮的入射和反射成份的情况下，我们认为一般所应采用的方法是在模拟潮波时，输入一前进波，或适当地考虑反射效应，使计算结果与实际吻合（包括潮位和潮流的振幅、迟角以及它们的相位差r的吻合情况）．从而判定变截面河口中是前进潮波为主，还是驻立潮波为主．实际上文献〔5〕正是采用的这种方法.

参 考 文 献

[1] Hunt, J. N., Tidal oscillations in estuaires, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc* 8 (1963), 440—455.
[2] 叶安乐，一种变截面河口中的潮汐响应，山东海洋学院学报，14（1983），2:1—11.
[3] 陈宗镛，潮汐学，科学出版社，1980，79.
[4] 华东水利学院等四校合编，河流动力学，人民交通出版社，1981，172.
[5] 叶安乐，杭州湾的潮汐——断面呈指数形式变化的解析模式，海洋湖沼通报，1983，4:9—16.