

# 波流共同作用下水平杆件上的力谱

滕 斌 李 玉 成

(大连工学院土木工程系)

## 摘 要

本文根据波流共同作用下的修正Morison公式和等效线性化方法,近似地求得了水平杆件上波流作用力的相关函数,并通过傅里叶变换,求得了波面谱与波力谱间的传递函数和力谱函数。文中还将本方法与实验结果做了比较,最后利用本方法做了部分计算实例。

在海洋结构物的设计过程中,谱分析方法正被工程师们所重视和应用。当采用谱分析方法时,在结构分析前应首先根据已知的波浪谱,求得作用在结构上的波力谱,做为结构系统的输入信号。但由于拖曳力的非线性,给波力谱的计算造成了一定的困难。

Borgman<sup>[1]</sup>根据Morison方程,求得了小直径垂直桩柱上的波浪力相关函数和力谱函数。随后,Tung和Huang<sup>[2]</sup>将这一问题进一步推广到波流共同作用的情况。

水平杆件是海洋结构物中普遍采用的一种构件,但作用于它上面的波流作用力却较垂直桩柱复杂的多。水平杆件上的波流作用力可分为三个组成部分:拖曳力、惯性力和升力。这些力都作用在一个平面内,而且其方向和大小随着波相角的变化而不断地变化着。由于升力频率、初相和大小的不确定性,因而人们很难将上述三者区分开来。目前,有几种建议的模型用于水平杆件上波流作用力的计算,其中,部分学者建议采用修正向量形式的Morison公式进行计算。对于不规则波浪对水平杆件的作用问题,文献〔3〕基于Morison公式计算的波浪力,由等效线性化方法求得了波浪力相关函数的一次近似,并进而求得了波力谱的近似表达形式。本文的目的在于将文献〔3〕的方法,进一步推广到波流共同对水平杆件的作用。

## 一、随机波流场

当波浪在水流中传播时,按照势流理论,水体的运动可看成为水流运动和波浪运动的线性叠加。对于余弦波浪

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega_0 t) \quad (1)$$

其弥散关系为

$$\left. \begin{aligned} \omega_s &= \omega_r + U_c k, \\ \omega_s^2 &= gk \tanh(kd), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\omega_s$ 、 $\omega_r$  分别为静止坐标系中和随水流一起运动坐标系中的角频率。

当一个随机波浪从静水中传入水流中时，根据波作用通量守恒方程，水流中的波浪谱可写成：

$$S_w(\omega) = \frac{C_{r,r} \omega_r}{\omega_s (C_{r,r} + U_c)} S S_w(\omega) \quad (3)$$

$S S_w(\omega)$  和  $S_w(\omega)$  分别为静水和水流中的波浪谱。

在波流共同作用下，波面过程一般仍可认为是一平稳的高斯过程<sup>〔2〕</sup>。这样，速度分量和加速度分量间的统计关系与静水中的相同（参见文献〔3〕），并分别满足：

$$\left. \begin{aligned} R_{v_x}(\tau) &= -R_{v_x}(-\tau), \\ R_{a_x a_x}(\tau) &= -R_{a_x a_x}(-\tau), \\ R_{v_x a_x}(\tau) &= R_{v_x a_x}(-\tau), \\ R_{a_x v_x}(\tau) &= R_{a_x v_x}(-\tau), \\ R_{v_x a_z}(\tau) &= R_{v_x a_z}(-\tau), \\ R_{a_z v_x}(\tau) &= -R_{a_z v_x}(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

但其速度谱和加速度谱的传递函数分别为

$$\left. \begin{aligned} H_{v_x}(\omega) &= \omega_r \operatorname{ch} k(z+d) / \operatorname{sh} kd, \\ H_{a_x}(\omega) &= i \omega_r \operatorname{sh} k(z+d) / \operatorname{sh} kd, \\ H_{v_x a_x}(\omega) &= i \omega_r^2 \operatorname{ch} k(z+d) / \operatorname{sh} kd, \\ H_{a_x v_x}(\omega) &= -\omega_r^2 \operatorname{sh} k(z+d) / \operatorname{sh} kd. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

根据静水中波浪谱与水流中波浪谱间传递函数、水流中波浪谱与质点速度谱、加速度谱间的传递函数，则可由静水中波浪谱求得水流中的速度谱和加速度谱。

## 二、水平杆件上的波流力及波力谱

波流中的水平杆件一般受到拖曳力、惯性力和升力的共同作用，并且作用在一个平面内。由于升力频率及其相位的不确定性，使得人们很难将它从总力中分离出来。因而，有些学者建议采用修正的 Morison 公式，计算波流对水平杆件的作用问题。如：Chandler 和 Hinwood<sup>〔4〕</sup> 将波流共同作用下，水平杆件上的水平分力表达为

$$f_x = C_D \frac{1}{2} \rho D (u + U_c) [(u + U_c)^2 + v^2]^{1/2} + C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} a_x;$$

徐梅坤、李玉成<sup>〔5〕</sup> 将其总的波浪作用力表达为

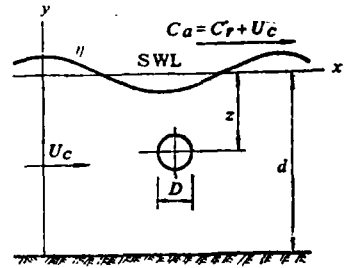


图1

$$\begin{Bmatrix} \vec{f} \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} = K_D \begin{Bmatrix} u + U_c \\ v \end{Bmatrix} \left[ (u + U_c)^2 + v^2 \right]^{1/2} + K_M \begin{Bmatrix} a_x \\ a_z \end{Bmatrix} \quad (5)$$

其中  $K_D = C_D \frac{\rho}{2} D$ ,  $K_M = C_M \rho \frac{\pi}{4} D^2$ . 他们还在实验室条件下, 分别根据上述的公式,

对拖曳力系数和惯性力系数做了实际测量. 从得到的结果来看, 拖曳力系数和惯性力系数的收敛性还是比较好的. 另外, 徐梅坤等<sup>[5]</sup> 还就不规则波浪与水流共同对水平杆件的作用问题做了实验研究, 其时域计算谱与实测力谱也是比较吻合的.

在工程设计中, 有时对某一方向上的作用力尤为感兴趣, 根据公式(6), 任一给定  $i$  方向的波浪作用力可表达为

$$\begin{aligned} f_i = & [K_D (u + U_c) \sqrt{(u + U_c)^2 + v^2} + K_M a_x] e_{ix} \\ & + [K_D v \sqrt{(u + U_c)^2 + v^2} + K_M a_z] e_{iz} \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $e_{ix}$  和  $e_{iz}$  分别为  $i$  方向的方向余弦.

在随机波浪作用下, 杆件上的波浪力也是一个随机过程, 但与静水中不同的是, 波浪共同作用下的力均值不为零, 而等于

$$\bar{f}_i = K_D E \{ (u + U_c) \sqrt{(u + U_c)^2 + v^2} \} e_{ix} \quad (8)$$

$f_i$  的相关函数为

$$\begin{aligned} R_{f_i f_i}(\tau) = & E \{ f_x(t) f_x(t + \tau) \} e_{ix}^2 + E \{ f_z(t) f_z(t + \tau) \} e_{iz}^2 \\ & + E \{ f_x(t) f_z(t + \tau) + f_z(t) f_x(t + \tau) \} e_{ix} e_{iz} - \bar{f}_i^2 \end{aligned}$$

由于认为波浪场为平稳的高斯过程, 波浪力的相关函数可简化为(参见文献[3])

$$\begin{aligned} R_{f_i f_i}(\tau) = & [E \{ K_D^2 [(u + U_c) \sqrt{(u + U_c)^2 + v^2}]_{i+\tau} \} \times [(u + U_c) \\ & \sqrt{(u + U_c)^2 + v^2}]_{i+\tau} \} + K_M^2 R_{a_x a_x}(\tau)] e_{ix}^2 + [E \{ K_D^2 [v \sqrt{(u + U_c)^2 + v^2}]_{i+\tau} \\ & \times [v \sqrt{(u + U_c)^2 + v^2}]_{i+\tau} \} + K_M^2 R_{a_z a_z}(\tau)] e_{iz}^2 \\ & + 2(C_2 - C_1) K_D K_M R_{a_x a_z}(\tau) e_{ix} e_{iz} - \bar{f}_i^2 \end{aligned} \quad (9)$$

这是  $C_1$  和  $C_2$  分别为

$$\begin{aligned} C_1 = & E \{ (u + U_c) \sqrt{(u + U_c)^2 + v^2} \} / \sigma_u^2, \\ C_2 = & E \{ v^2 \sqrt{(u + U_c)^2 + v^2} \} / \sigma_v^2 \end{aligned} \quad (10)$$

$C_1$  和  $C_2$  的计算见附录.

拖曳力的非线性问题, 可采用等效线性化方法进行处理, 设水平方向和垂直方向的等效拖曳力分别为

$$\begin{aligned} f_{ix}^* = & K_D (\alpha + \beta u), \\ f_{iz}^* = & K_D \gamma v. \end{aligned} \quad (11)$$

选择  $\alpha$ 、 $\beta$  和  $\gamma$  使得误差值的方差为最小, 即

$$E\{\left[\alpha + \beta u - (u + U_0) \sqrt{(u + U_0)^2 + v^2}\right]^2\} = \min,$$

$$E\{\left[\gamma v - v \sqrt{(u + U_0)^2 + v^2}\right]^2\} = \min,$$

这样，可以得到

$$\alpha = E\{(u + U_0) \sqrt{(u + U_0)^2 + v^2}\} = \overline{f_i} / (K_D e_{i,z}),$$

$$\beta = E\{u(u + U_0) \sqrt{(u + U_0)^2 + v^2}\} / \sigma_u^2 = C_1, \quad (12)$$

$$\gamma = E\{v^2 \sqrt{(u + U_0)^2 + v^2}\} / \sigma_v^2 = C_2.$$

将线性化的拖曳力代入式(9)中，可以得到

$$R_{f_i f_i}(\tau) = [K_D^2 C_1^2 R_{u_u}(\tau) + K_M^2 R_{\sigma_u \sigma_u}(\tau)] e_{i,z}^2 + [K_D^2 C_2^2 R_{v_v}(\tau) + K_M^2 R_{\sigma_v \sigma_v}(\tau)] e_{i,z}^2 + 2(C_2 - C_1) K_D K_M R_{\sigma_u \sigma_v}(\tau) e_{i,z} e_{i,z}. \quad (13)$$

波浪谱密度函数  $S_{f_i f_i}(\omega)$  可通过相关函数  $R_{f_i f_i}(\tau)$  的傅里叶变换而得到

$$S_{f_i f_i}(\omega) = |H_{f_i}(\omega)|^2 S_\eta(\omega), \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} |H_{f_i}(\omega)|^2 = & [K_D^2 C_1^2 |H_u(\omega)|^2 + K_M^2 |H_{\sigma_u}(\omega)|^2] e_{i,z}^2 \\ & + [K_D^2 C_2^2 |H_v(\omega)|^2 + K_M^2 |H_{\sigma_v}(\omega)|^2] e_{i,z}^2 \\ & + 2(C_2 - C_1) K_D K_M H_{\sigma_u} H_{\sigma_v} e_{i,z} e_{i,z}. \end{aligned}$$

对于下述两种情况，波面谱与波力谱间的传递函数可进行简化：

(1)  $i$  方向为水平方向， $e_{i,z} = 1$ 、 $e_{i,z} = 0$

$$|H_{f_i}(\omega)|^2 = K_D^2 C_1^2 |H_u(\omega)|^2 + K_M^2 |H_{\sigma_u}(\omega)|^2.$$

(2)  $i$  方向为垂直方向， $e_{i,z} = 0$ 、 $e_{i,z} = 1$

$$|H_{f_i}(\omega)|^2 = K_D^2 C_2^2 |H_v(\omega)|^2 + K_M^2 |H_{\sigma_v}(\omega)|^2.$$

与纯波浪作用下(文献〔3〕)不同的是，尽管在无限水深情况下， $v$  与  $u$  仍具有相同的概率分布，但由于水流的影响， $C_1$  与  $C_2$  是不相等的，因而仍存在着拖曳力与惯性力间的耦合作用。

### 三、与实验结果的对比和部分计算实例

利用前面提出的公式(14)和文献〔5〕中的实验结果，用传递函数方法计算了随机波浪与水流共同作用下的，水平杆件上的波浪力谱。计算中所采用的  $C_D$  和  $C_M$  系数，同样也是根据文献〔5〕中的实测资料选取的。本文选取的方法为，首先根据实测的波浪谱求得

平均周期  $\overline{T} = 2\pi \left( \frac{M_0}{M_2} \right)^{1/2}$  和均方根波高  $H_{r.m.s.} = \sqrt{8M_0}$  ( $M_0$ 、 $M_2$  分别为波浪谱的零阶矩和二阶矩)，然后以  $\overline{T}$  和  $H_{r.m.s.}$  为特征值计算波动质点速度和  $K$  数，即

$$u_w = \frac{H \cdot \pi \cdot s}{2} \omega \cdot \frac{\text{ch} k(z+d)}{\text{sh} kd}$$

$$K_c = \begin{cases} 2\pi \int_0^{t^*} \sqrt{(u_c + \bar{u}_w \cos \omega t)^2 + (u_w \sin \omega t)^2} dt / D & U_c \leq U_w \\ 2\pi \int_0^{\bar{t}^*/2} \sqrt{(u_c + u_w \cos \omega t)^2 + (u_w \sin \omega t)^2} dt / D & U_c > U_w \end{cases}$$

其中  $t^* = \cos^{-1}(-U_c/U_w) / \omega$ 。最后，根据文献〔7〕中的经验曲线，求得  $C_D$  和  $C_M$  值并直接代入式 (14) 中进行计算。当然，如何将已有的规则波结果用于不规则波下的计算，今后还值得深入研究，这一问题在本文中未深入研讨。

由传递函数法计算的波力谱与实测力谱的比较见图2至图5。为了比较方便，我们定义误差参数  $\epsilon = \frac{|M_{0,测} - M_{0,计}|}{M_{0,测}}$ 。从比较中可以看到：在流速为  $U_c = 7.0 \text{ cm/s}$  时，计算

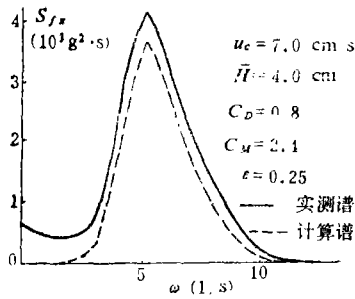


图 2

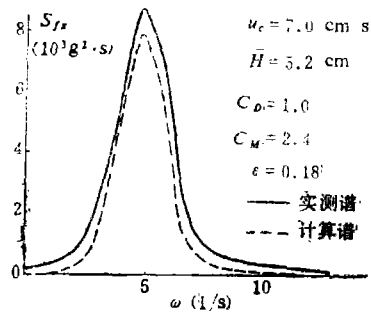


图 3

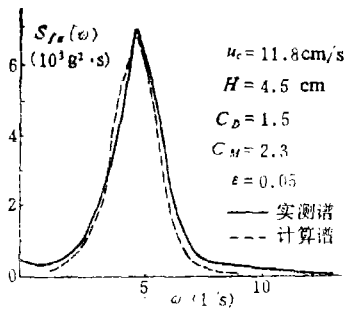


图 4

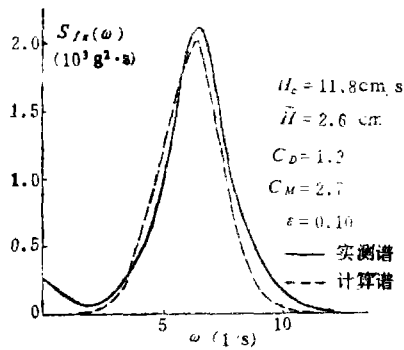


图 5

谱与实测谱相差较大，其误差  $\epsilon$  在 0.20 左右；而在  $U_c = 11.8 \text{ cm/s}$  时，计算谱与实测谱间的误差较小，其误差  $\epsilon$  在 0.1 以下。从分布上看，在  $U_c = 11.8 \text{ cm/s}$  情况下，计算谱的能量较实测谱略偏向于低频区，在低频区计算谱略大于实测谱，而在高频区略小于实测谱。而当  $U_c = 7.0 \text{ cm/s}$  时，计算谱则普遍低于实测谱，但其差值却比较规则。造成这一现象的原因，主要是  $C_D$  和  $C_M$  的取值问题，如果适当地调整  $C_D$  和  $C_M$  值，可以得到与实测谱很接近的

结果。但考虑到 $C_D$ 、 $C_M$ 选取的统一性，本文中只列出了由均方根波高、平均周期为特征值，从文献〔5〕中查取受力系数的计算结果。

图6是在当地水深为20m、水面下5m处、直径为1m的单位长杆件上，力谱传递函数和力谱函数随流速变化的分布曲线。计算中取 $C_D=1.0$ 、 $C_M=2.0$ ，波浪谱为静水中平均波高为4m的P-M谱（以后计算相同）。从图中可以发现一个十分重要的现象：在顺流情况下，波力谱并不象质点速度和加速度谱那样，随着流速的增加而减小。这是由于线性化系数 $C$ 随着 $U_c$ 、 $\sigma_u$ 和 $\sigma_a$ 的增大而增大。当流速较大时，尽管速度方差 $\sigma_u$ 、 $\sigma_a$ 会相应地减小，水平力谱传递函数却因流速 $U_c$ 较大而有较大的响应值。这样，尽管波浪谱随着流速的增加而减小，但水平力谱在波峰区或主要能量区，却可能随着流速的增加而增大。

图7是力谱函数在不同深度的分布曲线。从计算结果可以看到，逆流中的波力谱随深度

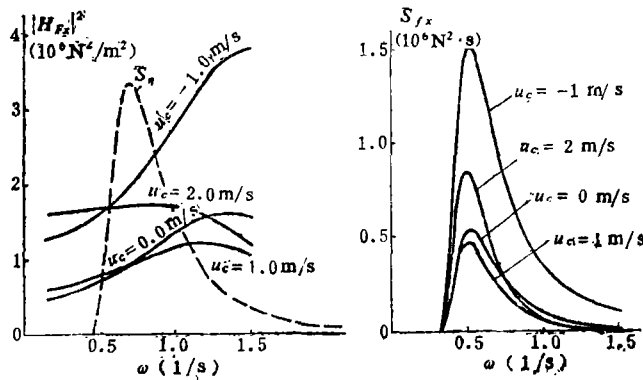


图 6

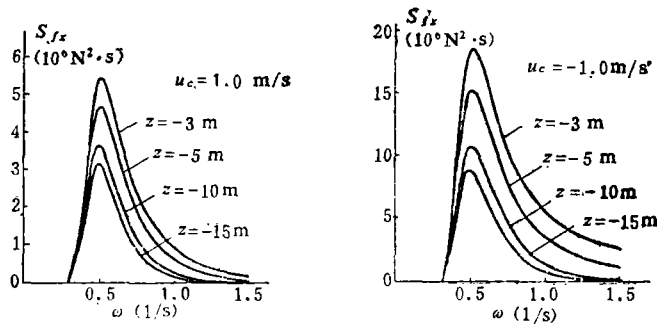


图 7

的衰减，将比顺流中的衰减更为迅速，而且在高频区的衰减也较为缓慢。这些现象是由于当波浪与逆流相遇时，其波长缩短，相对频率增大；而与顺流相遇时，其波长变长，频率减小的缘故。波长较短的波浪比波长较长的波浪沿深度的衰减更为迅速，因而逆流中的波力谱随深度的衰减快于顺流中波力谱的衰减。同时频率的增大使水质点速度和加速度增大，因而使逆流中的质点速度谱、加速度谱和力谱在高频区的收敛变缓。

图8是水平杆件上力谱传递函数在各个方向上的分布曲线, 同文献〔3〕的结果相类似, 在低频区和主要波能区, 水平方向和垂直方向上的传递函数分别具有最大值和最小值; 但在高频区则不同, 一些方向上的传递函数将超出它们的范围. 但是, 由于波浪谱的高频分量是非常微弱的, 我们可以认为水平方向和垂直方向上的波力谱, 分别为最大波力谱和最小波力谱. 另外还应注意, 拖曳力与惯性力间的耦合作用是十分强烈的, 在关于Z轴对称的两个方向上, 比如 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 的方向上, 其力谱间的差异是十分明显的.

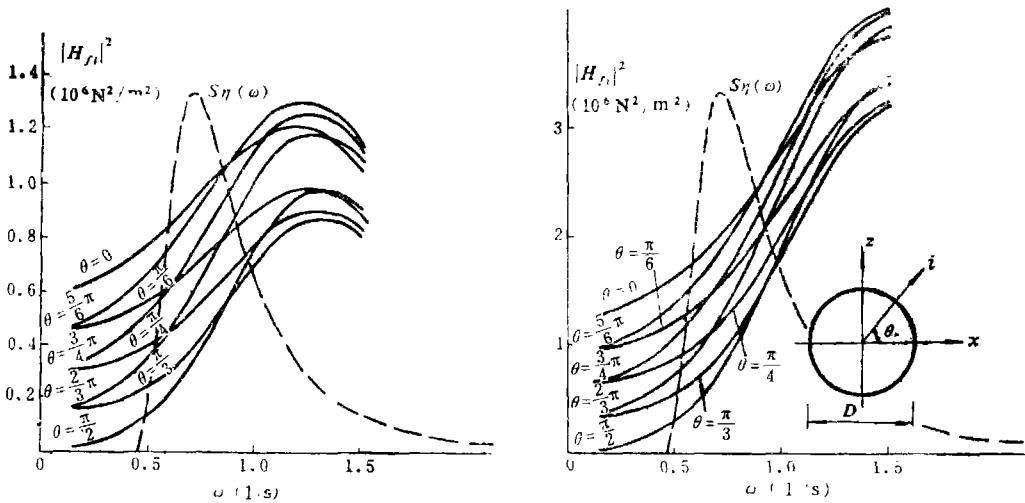


图 8

#### 四、结 论

1. 对于波流共同作用下的水平杆件, 当采用Morison公式计算其上的波流力时, 利用等效线性化方法对拖曳力进行线性化处理, 可求得水平杆件任一方向上的波浪力传递函数和波浪力谱. 适当地选择拖曳力系数和惯性力系数, 可得到比较满意的结果.

2. 逆流中的波力谱随着逆流流速的增加而增大. 但在顺流下, 当流速较小时, 水平波力谱随着流速的增加而减小; 进一步增加流速, 水平波力谱又随着流速的增加而增大.

3. 拖曳力与惯性力间存在着强烈的耦合作用, 在关于Z轴对称的两个方向上的力谱有着明显的差别, 但可近似地认为水平方向具有最大的波力谱, 垂直方向上具有最小的波力谱. 在顺流情况下, 水平方向力谱与垂直方向力谱的差别比逆流中的更为明显.

附录  $C_1$ 、 $C_2$  和  $\alpha$  的计算

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{\sigma_u^2} E \left\{ u(u+U_c) \sqrt{(u+U_c)^2 + v^2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{R^2}{2}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (r^4 \cos^2 \theta - r^3 R \cos \theta) \sqrt{\cos^2 \theta \sigma_u^2 + \sin^2 \theta \sigma_v^2} e^{-\frac{r^2}{2} - r R \cos \theta} dr d\theta \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{R^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n+3)!}{(2n)!} R^{2n} - \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} R^{2(n+1)} \right] \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2(n+1)} \\
 &\quad \sqrt{\sigma_u^2 \cos^2 \theta + \sigma_v^2 \sin^2 \theta} d\theta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{1}{\sigma_v^2} E \left\{ v^2 \sqrt{(u+U_c)^2 + v^2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{-R^2/2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^4 \sin^2 \theta \sqrt{\cos^2 \theta \sigma_u^2 + \sin^2 \theta \sigma_v^2} e^{-\frac{r^2}{2} - r R \cos \theta} dr d\theta \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{R^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n)!} R^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta (\cos \theta)^{2n} \sqrt{\sigma_u^2 \cos^2 \theta + \sigma_v^2 \sin^2 \theta} d\theta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha &= E \left\{ (u+U_c) \sqrt{(u+U_c)^2 + v^2} \right\} \\
 &= \frac{\sigma_u}{2\pi} e^{-\frac{R^2}{2}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty r^{3+n} \frac{R^n e^{-\frac{r^2}{2}}}{n!} dr \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{n+1} \sqrt{\cos^2 \theta \sigma_u^2 + \sin^2 \theta \sigma_v^2} d\theta \right] \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_u e^{-\frac{R^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n)!} R^{2n+1} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2(n+1)} \sqrt{\sigma_u^2 \cos^2 \theta + \sigma_v^2 \sin^2 \theta} d\theta,
 \end{aligned}$$

其中  $R = U_c / \sigma_u$ 。

定积分可采用数值法求得, 级数的收敛是十分迅速的。

## 参 考 文 献

- [1] Borgman, L. E., Spectral analysis of ocean wave force on piling. Proc., ASCE, 93 (1967), WWZ, 129—156.
- [2] Tung, C. C. and N. E. Huang, Combined effects of current and waves on fluid force, *Ocean Engineering*, 2 (1973), 183—193.
- [3] 滕 斌、李玉成, 水平杆件上的波浪力谱, 海洋通报, 7 (1988)。
- [4] Chandler, B. D. and J. B. Hinwood, Combined wave-current forces on horizontal cylinders Proc. of 18th ICCE, 1982, 2127—2187.
- [5] 徐梅坤、李玉成, 作用于水平桩柱上的波流力, 海洋学报, 10 (1988), 1, 107—116.