

考虑底摩擦的波动折射绕射 联合模式的应用

蒋德才 叶安乐

(山东海洋学院物理海洋与海洋气象系, 青岛)

摘 要

本文利用考虑底摩擦的简单波折射绕射联合模式计算了某港附近区域中海浪要素。用本文结果与用简单波折射模式计算所得的结果及与1985年一次台风期间的实际观测资料作比较可以看出, 用本文给出的模式算得的海浪要素是合理的, 计算结果与实际观测相当好地一致。可以断定, 这种模式对于计算复杂海底地形上的近岸波要素是有效的。

在复杂海底地形上正确计算近岸波要素, 对海岸带开发、港工建设具有重要的实用意义。但是, 近年来计算近岸波要素一直停留在应用简单波的折射数值模式或折射作图法上, 用这些方法对复杂地形上近岸波要素计算存在着许多限制, 尤其在波焦散区存在无法克服的困难。Whalin^[1]的实验表明, 简单波折射系数低至1.1—1.2时, 沿波峰的绕射作用足以改变折射系数(或波高)的分布, 在波焦散区绕射作用更为重要, 这使简单波折射数值结果与实验不符; 实验还表明, 粘性导致波高衰减为3%。由此, 改进复杂地形上近岸波要素计算的折射模式是必要的, 也是重要的。Skovgaard^[2]首先在折射模式中考虑摩擦因子来提高计算精度。Houston^[3]采用有限元方法解折射绕射模式, 克服了折射计算中的限制和困难, 由于该方法计算量大、费机时, 未能在实践中广泛应用。近来, Lozan和Liu^[4]在地形缓慢变化条件下, 导出线性的折射方程和抛物近似的绕射方程, 对折射模式中计算困难的波焦散区进行了数值计算。Tsay和Liu^[5]又将上述模式应用到防波堤后地形缓慢变化的绕射折射及波焦散区的波要素计算。文献[4, 5]的数值计算结果与实验资料是符合的。本文为了克服折射模式中的困难, 减少其在地形方面的限制, 我们引进地形缓慢变化的一般定义, 用Lozano和Liu提出的抛物近似假定, 建立了考虑底摩擦的折射绕射联合模式, 采用变步长差分方法, 对某港附近复杂地形上的近岸波要素(波高、波向)的分布进行了数值计算, 其结果与1985年一次台风产生的近岸波的观测资料符合。

一、数学模式

设直角坐标系 $0-x', y', z'$ 的原点固定在自由表面, z' 向上为正, 静止时水深 $z' = -h'(x', y')$, 假定流场是无粘、无旋的, 依线性波动理论, 波动势函数可表示为

$$\Phi' = \varphi'(x', y', z') e^{-i\omega' t'} \quad (1)$$

式中, ω' 是给定的波动圆频率。

我们假定波动的典型波长比深度变化的水平比尺度小得多, 引入地形缓慢变化的无因次小参数 ε

$$\varepsilon = O\left(\frac{\nabla h'}{k' h'}\right) \ll 1. \quad (2)$$

为了普遍性, 设时间也是缓慢地调制。依 Keller 引入缓慢变化坐标

$$\tilde{x} = \varepsilon x', \quad \tilde{y} = \varepsilon y', \quad \tilde{t} = \varepsilon t'. \quad (3)$$

相应的无因次坐标和无因次量有

$$(x, y, z) = \left(\frac{\omega^2}{g'}\right) (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad (4a)$$

$$\varphi = \left(\frac{\omega'^3}{g'^2}\right) \varphi', \quad t = \omega' \tilde{t}, \quad (4b)$$

则线性波动的控制方程可表示为

$$\varepsilon^2 \Delta \varphi + \varphi_{zz} = 0, \quad -h < z < 0, \quad (5)$$

$$\varphi_z - \varphi = 0, \quad z = 0, \quad (6)$$

$$\varphi_z + \varepsilon^2 \nabla h \nabla \varphi = 0, \quad z = -h, \quad (7)$$

式中, 算子 $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, 下标 z 表示对 z 求偏导。

(一) 线性波的折射模式

在缓慢变化地形上传播的波动势函数, 可用小参数 ε 展开的渐近式来表示

$$\varphi = [a(x, y) + \varepsilon A^{(0)}(x, y, z) + O(\varepsilon^2)] \operatorname{ch} k(z+h) e^{i\varepsilon^{-1} S}, \quad (8)$$

式中, $a(x, y)$ 是波振幅, h 为水深, $k(x, y)$ 是局地波数, 它满足色散关系

$$k \operatorname{th} kh = 1, \quad (9)$$

而 S 是波动的相函数, 满足近似平面波波数关系

$$(\nabla S)^2 = k^2 \quad (10)$$

及振幅传输方程

$$(\nabla S) \nabla [a^2 c_r \operatorname{sh}(2kh)/(2kc)] + \Delta S [a^2 c_r \operatorname{sh}(2kh)/(2kc)] = 0, \quad (11)$$

式中, c_r 是对应于波速 c 的群速度。沿波向线的振幅传输方程 (11) 可改写为

$$\frac{a^2}{2} \operatorname{sh} 2kh (c_s/c) dn = \text{常数}, \quad (12)$$

或

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + p(s) \frac{d\beta}{ds} + q(s)\beta = 0, \quad (13)$$

$$p(s) = \frac{1}{c} \left(-\cos\theta \frac{\partial c}{\partial x} - \sin\theta \frac{\partial c}{\partial y} \right), \quad (14)$$

$$q(s) = \frac{1}{c} \left(\sin^2\theta \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - 2\sin\theta \cos\theta \frac{\partial^2 c}{\partial y \partial x} + \cos^2\theta \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right), \quad (15)$$

式中, θ 是波向线与 x 轴的夹角, (s, n) 是由波向线和波峰线定义的正交曲线坐标. β 是波动散射因子, 它等于 dn/dn_0 的比值, 是折射系数 K 平方的倒数 ($1/K^2$).

(二) 抛物近似下的绕射方程

当波动向浅水传播时, 海底坡度影响波能散射的效应逐渐变得重要, 显示波绕射影响不可忽略. 我们假定在一个波长内, 绕射因子 F 的变化是缓慢的, 且沿波峰线方向的变化比波向线方向快, 用数学表示为

$$|F| = \varepsilon \left| \frac{\partial F}{\partial n} \right| \gg \varepsilon \left| \frac{\partial F}{\partial s} \right|, \quad O\left(\left| \frac{\partial F}{\partial s} \right|\right) = O\left(\varepsilon \left| \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \right|\right), \quad (16)$$

式中, 无因次坐标 $(n, s) = (\varepsilon n', \varepsilon s')$ (ω'^2/g').

依式 (16) 假定引入小参数 μ 及无因次伸展坐标 $(\tilde{n}, \tilde{s}, \tilde{z})$

$$\tilde{n} = \mu^{-1} n, \quad \tilde{s} = \mu s, \quad \tilde{z} = \mu^2 z. \quad (17)$$

用小参数 μ 表示绕射因子 \tilde{F} 的渐近表达式

$$\tilde{F}(\tilde{n}, \tilde{s}, \tilde{z}) = \tilde{F}^{(0)}(\tilde{n}, \tilde{s}) + \mu \tilde{F}^{(1)}(\tilde{n}, \tilde{s}, \tilde{z}) + O(\mu^2). \quad (18)$$

式中, $\tilde{F}(\tilde{n}, \tilde{s}, \tilde{z}) = F(\mu \tilde{n}, \mu^{-1} \tilde{s}, \mu^{-2} \tilde{z})$. 将式 (18) 代入式 (16) 得小参数 μ 与 ε 的关系, $\mu = \varepsilon^{1/3}$. 由于 $\tilde{s} = \varepsilon^{1/3} s' \omega'^2/g'$, 所以我们所讨论的式 (17) 的伸展坐标沿波向线的一段距离 $O(\varepsilon^{1/3})$ 内的绕射因子的变化, 将与线性折射因子变化的量级相当. 设折射绕射的势函数为

$$\varphi = F(n, s, z) [a(n, s) + \varepsilon A^{(0)}(n, s, z) + O(\varepsilon^2)] \operatorname{ch} k(z+h) e^{i\varepsilon^{-1} s}, \quad (19)$$

式中, $F(n, s, z)$ 由式 (18) 渐近式表示. 把式 (19) 代入控制方程, 并使幂级数中 μ^4 项的系数相等得绕射因子 F 的一阶抛物线近似方程

$$2ik\mu^{-1} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial s} + 2\mu \frac{\partial \mu}{\partial n} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial n} + \mu^2 \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial n^2} = 0. \quad (20)$$

最后, 在抛物线近似下的线性波折射绕射联合模式的势函数可表示为

$$\varphi = F^{(0)}(n, s) a(n, s) [1 + O(\varepsilon^{4/3})] e^{i\varepsilon^{-1}s}. \quad (21)$$

(三) 底摩擦效应

按照小振幅波动理论, 底摩擦效应对波高影响的反映为

$$K_{\tau} = \frac{H}{H_1} = \left[\frac{16\pi}{3} \left(\frac{K_g}{L_0} \right)^2 \frac{fH_1}{\text{sh}^3 kh} \delta s + 1 \right]^{-1}. \quad (22)$$

式中, $K_g = [2\text{ch}^2 kh / (2kh + \text{sh} 2kh)]^{1/2}$ 是变浅系数; f 是底摩擦系数, 其值大小与海底底质有关; (δs) 是沿波向线的微分距离; H_1 、 H 分别为对应于微分距离起点和终点的波高值; L_0 是与周期 T_0 对应的波长。

二、数值计算方法

由于式 (14)、(15) 中的 $p(s)$ 、 $q(s)$ 是波向线上位置和波向的函数, 因此对波向线上任一点的波动散射因子 β 的计算可采用 Kelvin 方法。若将 S - β 平面上拟合曲线近似地看作积分曲线, 于是求 β 值便归结为根据边值条件在 S - β 平面内解 $\beta(S)$ 。图 1 中曲线 τ 代表所求的解, 在此情况下, 如果取曲线的切线与 S 轴间的夹角为 φ , 则曲线 τ 的曲率 K_{τ} 为

$$K_{\tau} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\tau} = \frac{d\varphi/ds}{d\tau/ds}, \quad (23)$$

把 $\text{tg}\varphi = d\beta/ds$ 代入上式得

$$K_{\tau} = \cos^3\varphi \frac{d^2\beta}{ds^2}, \quad (24)$$

由式 (13) 解出 $d^2\beta/ds^2$ 并代入式 (24) 后得

$$K_{\tau} = - [p(s) \sin\varphi + q(s) \beta \cos\varphi] \cos^2\varphi. \quad (25)$$

由点 S_k 处的 β_k 、 $K_{\tau, k}$, 相应经历一弧长增量 $\Delta\tau$ 后的点 S_{k+1} 处的 β_{k+1} 、 $K_{\tau, k+1}$ 值可用迭代法算出, 计算过程如下:

$$\Delta\tau = [(\Delta S)^2 + (\Delta\beta)^2]^{1/2}, \quad (26)$$

点 S_{k+1} 处相对于点 S_k 处切线与 S 轴夹角增量 $\Delta\varphi_k$ 是

$$\Delta\varphi_k = K_{\tau, k} \Delta\tau. \quad (27)$$

而

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \Delta\varphi_k. \quad (28)$$

经历弧长 $\Delta\tau$ 的 φ 的平均角 $\overline{\varphi}$ 是

$$\overline{\varphi} = \varphi_k + \frac{1}{2} \Delta\varphi_k, \quad (29)$$

而

$$\Delta\beta_k = \Delta\tau \sin \overline{\varphi} \quad (30)$$

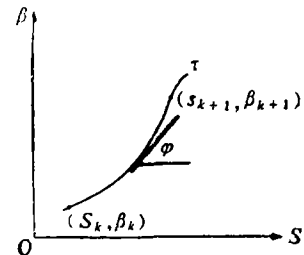


图 1 s - β 平面

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \Delta\beta_k, \quad (31)$$

$$K_{r, k+1} = -(p(s)\sin\varphi_{k+1} + q(s)\beta_{k+1}\cos\varphi_{k+1})\cos^2\varphi_{k+1}. \quad (32)$$

把式(31)、(32)计算得到的 β_{k+1} 、 $K_{r, k+1}$ 作为第一次估计值,然后依 $K_{r, k+1}$ 和 $K_{r, k}$ 的平均值 $\bar{K}_{r, k}$ 重复式(27)至(32)计算,获得 β_{k+1} 、 $K_{r, k+1}$ 的第二次估计值。依此类推。如果相邻的两次估计值相对误差小于0.0001弧度/网格长度,则接受最后的估计值。紧接着进行下一点的计算。

沿波向线 S 的绕射因子 F ,用变步长差分方法求解抛物近似方程(20)获得,沿波向线 S 上各点的 K_r 、 K_l 值由给定的水深 $h(x, y)$ 及计算得的局地波长直接计算得到。在变步长差分数值计算过程中,步长取局地波长之半,水深仅在 250×250 米网格点上给出,当计算点不在格点上时,水深由4点内插法求得。计算起始边界条件:深水波高 H_0 ,周期 T_0 和波向 θ_0 ,由实测或工程要求给定;绕射因子 F_0 取为1, $\beta=1$, $\varphi=0$ 。小参数 ε 由沿波向线深度梯度来确定。

三、计算结果

我们应用考虑摩擦的折射绕射模式对某港附近作了近岸波要素的数值计算,给定初始

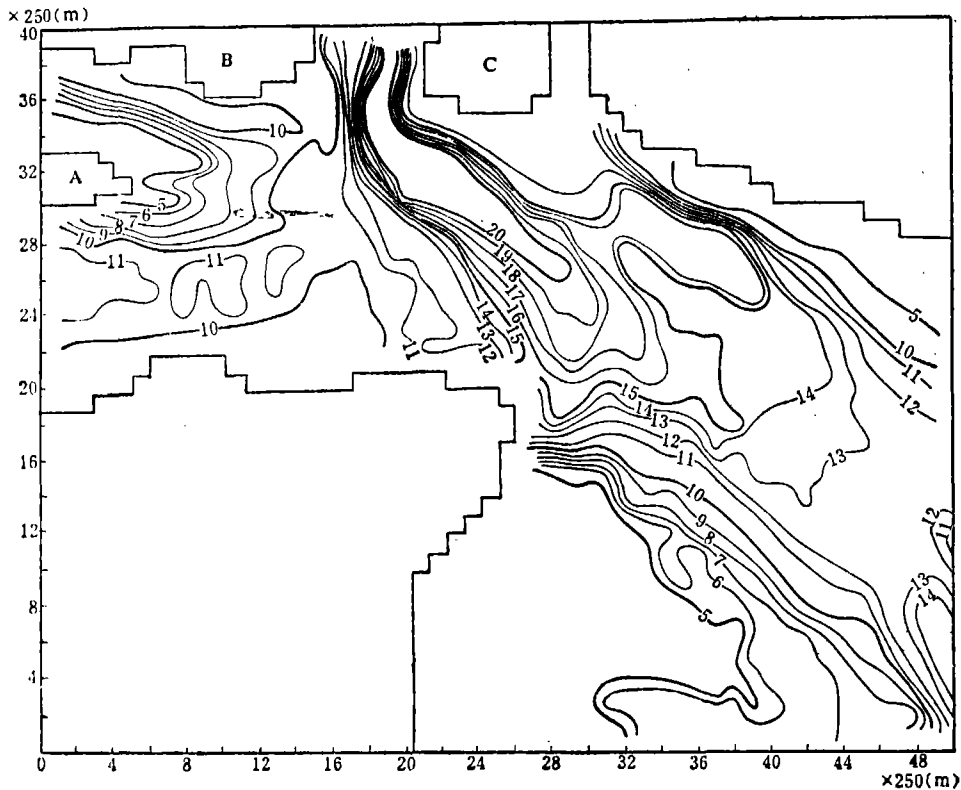


图2 某港的海底地形

线交点. 因此, 折射绕射联合模式计算近岸波动传播可直至破碎带.

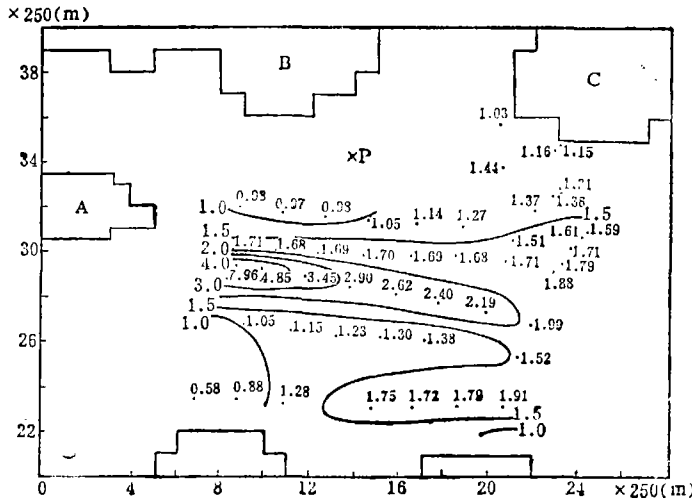


图7 $T=9.2$ 秒等波高线分布

2. 图6、图7分别表示周期为10.2秒、9.2秒应用联合模式计算的等波高线分布. 两图表明, 在A岛东侧浅水区, 因波向线辐聚, 波高增大, 所以有一个东西向的大浪区; 在B岛至C岛一线, 因波向辐散, 所以波高减小, 波高一般在1米左右.

表1 不同模式波高的比较

计算点	$H_{r,d,f}$	$H_{r,d}$	$H_{r,f}$	H_r
S_1	1.09	1.13	1.09	1.13
S_2	2.27	2.42	2.36	2.46
S_3	3.41	3.55	4.67	4.89
S_4	0.80	0.83	0.71	0.74

3. 表1列出A岛附近从南至北的4个计算点处的折射波高 H_r 、折射绕射波高 $H_{r,d}$ 、考虑底摩擦的折射波高 $H_{r,f}$ 和折射绕射波高 $H_{r,d,f}$. 从表1看出, 在A岛附近波辐聚点(S_3)波高 $H_{r,f}$ 比波高 $H_{r,d,f}$ 大1.26米, 即考虑摩擦的折射波高比考虑绕射的折射波高大37%; 在波辐散点(S_4)波高 $H_{r,f}$ 比波高 $H_{r,d,f}$ 小0.09米, 即考虑摩擦的折射波高比考虑绕射的折射波高小11%.

从表1中波高 $H_{r,f}$ 和波高 H_r 相比, 或者波高 $H_{r,d,f}$ 和波高 $H_{r,d}$ 相比可以看出, 底摩擦效应一般使波高减小3—5%. 在较深水域 [$h(x,y) > 10$ 米的水域], 底摩擦效应使波高衰减1%左右, 当水深小于5米, 则底摩擦效应使波高衰减5%左右.

从上面结果看出, 本文联合模式数值计算结果与Whalin实验的结论是一致的.

四、计算结果与观测资料的比较

1985年某次台风经过讨论港区. 当在B岛东南偏南400米处(图7中的P点)观测到最大波高 $H_{1\%} = 1.4$ 米. 依文献〔7〕, 取 $\bar{H}/d = 0.1$, 以及 $H_{1\%}/H_{10} = 1.18$, 求得观测点

的十分之一大波波高 $H_{\frac{1}{10}} = 1.186$ 米。

当时观测点风速为 8 米/秒, 风向为东南, 风区长度 17.8 千米, 依文献 [7] 的小风区风浪图解求得当地产生的风浪波高 $H_f = 0.80$ 米 (即 $H_{\frac{1}{10}}$ 波高)

根据能量合成原理 $H_{\frac{1}{10}} = \sqrt{H_f^2 + H_s^2}$, 计算观测点处由港外传播来的波高 $H_s = 0.8758$ 米。

由本文 $T = 9.2$ 米对应的折射绕射联合模式的计算结果给出观测点处各系数 F 、 K_r 、 K_s 、 K_f 之积 $K = 0.18848$ 。由 H_s 和系数 K 外推到港区外 20 米等深线处, 求得波高 $H_0 = 4.65$ 米, 而当时在这里观测到的 1/10 大波波高是 4.5 米, 计算值与实测值仅差 0.15 米, 即相对误差为 3.3%。因此就这一次实测资料看来, 计算结果是良好的。

参 考 文 献

- [1] Whalin, R. W., Wave refraction theory in convergence zone, *Proc. 13th Coastal Engineering Conf.*, 1 (1972), Chap. 23, 451—470.
- [2] Skovgaard, O. et al., Computation of wave heights due to refraction and friction, *J. Water Ways, Harbors and Coastal Engineering Division*, 101 (1975), 1: 15—32.
- [3] Houston, J. R., Combined refraction and diffraction of short waves using the finite element method, *Applied Ocean Research*, 3 (1981), 4: 163.
- [4] Lozano, C. and P. L-F. Liu, Refraction diffraction model for linear surface water waves, *J. Fluid Mech.*, 101 (1980), 4: 705—720.
- [5] Ting-Kuei Tsay and P. L-F. Liu, Numerical solution of water-wave refraction and diffraction problems in the parabolic approximation, *Journal of Geophysical Research*, 87 (1982), 10: 7932—7940.
- [6] 龚崇准、戴功虎, 浅水波浪变形数学模型与淤泥海底摩擦系数的确定, *海洋工程*, 1983, 3: 21—33.
- [7] 中华人民共和国交通部, 港口工程技术规范 (海港水文), 人民交通出版社, 1978, 8—11.