

用最大熵方法估计同相谱和异相谱

刘 玉 光

(国家海洋局海洋科技
情报研究所, 天津)

余 宙 文

(山东海洋学院物理海洋
与海洋气象系, 青岛)

蒋 松 年

(国家海洋局海洋科技
情报研究所, 天津)

摘 要

本文提出了同相谱和异相谱的最大熵方法间接估计公式。该公式只使用一个预报误差过滤器,在实际谱估计中,它比Ulrych提出的需要3个独立的预报误差过滤器的公式更准确。按照该公式,本文对东海实测海流数据作了同相谱和异相谱估计。由计算结果,发现存在着一周期为7—8天、波长约为600千米、向北传播的低频波动。

最大熵方法是一种高精度的谱估计方法,但它只能直接对功率谱作估计,而不能直接用于交叉谱的估计。文献〔1〕曾给出同相谱和异相谱的一种最大熵方法的间接估计公式。设

$$a(t) = x(t) + iy(t),$$

$$b(t) = x(t) - y(t),$$

式中, $x(t)$ 、 $y(t)$ 是均值为0的平稳随机过程。利用交叉谱定义可以证明

$$C_{xx}(\omega) = [S_{bb}(\omega) - S_{xx}(\omega) - S_{yy}(\omega)]/2,$$

$$Q_{xy}(\omega) = [S_{aa}(\omega) - S_{xx}(\omega) - S_{yy}(\omega)]/2.$$

此处采用定义: $S_{xx}(\omega) = C_{xx}(\omega) - iQ_{xy}(\omega)$, $C_{xx}(\omega)$ 是同相谱, $Q_{xy}(\omega)$ 是异相谱, $S_{xx}(\omega)$ 是双侧交叉谱。按照上述公式,需要先计算3个功率谱的最大熵估计,然后才得到同相谱和异相谱的估计。实际计算表明,在3个中间量的计算中,若同一波动的谱峰位置互有偏差,或者由于定阶造成谱峰高度与能量之间的比例不一致,那么最后结果可能产生混乱。所以,要精心调节中间量的协调。由于难以调节, Hayashi〔2〕曾对该方法的可靠性提出怀疑。他指出,造成不准确的主要原因是使用了3个独立的预报误差过滤器。

一、一个新的方法

本文对实过程的同相谱和异相谱提出了只使用一个过滤器的最大熵间接估计方法。设

$$w(t) = u(t) + iv(t),$$

式中, $u(t)$ 、 $v(t)$ 是均值为0的实平稳随机过程。对于实过程,我们只讨论 $\omega = \sigma > 0$ 的情

况, $\omega < 0$ 时的同相谱和异相谱可由交叉谱的偏对称性求得.

$w(t)$ 可用富里叶-斯梯阶积分表示为

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dW(\omega),$$

式中, $W(\omega)$ 是 $w(t)$ 的富里叶-斯梯阶变换 (见文献 [3] 第 468 页). 在物理上, 增量 $dW(\omega)$ 可看作是和圆频率 ω 的微分相联系的复振幅. 这样, 复过程 $w(t)$ 的功率谱 $S_{ww}(\omega)$ 可用下式表示

$$S_{ww}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} E |dW(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} E [dW^*(\omega) dW(\omega)].$$

设 $U(\omega)$ 、 $V(\omega)$ 分别是 $u(t)$ 和 $v(t)$ 的富里叶-斯梯阶变换, 则

$$\begin{aligned} S_{ww}(\omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} [(dU^*(\omega) - idV^*(\omega))(dU(\omega) + idV(\omega))] \\ &= \frac{1}{2\pi} E |dU(\omega)|^2 + \frac{1}{2\pi} E |dV(\omega)|^2 \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} E [dU^*(\omega) dV(\omega)] - \frac{i}{2\pi} E [dU^*(\omega) dV(\omega)]^* \\ &= S_{uu}(\omega) d\omega + S_{vv}(\omega) d\omega + iS_{uv}(\omega) d\omega - iS_{vu}^*(\omega) d\omega \\ &= S_{uu}(\omega) d\omega + S_{vv}(\omega) d\omega + 2Q_{uv}(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

对于实过程, 注意到 $S_{uu}(\sigma) = S_{uu}(-\sigma)$, $S_{vv}(\sigma) = S_{vv}(-\sigma)$ 和 $Q_{uv}(\sigma) = -Q_{uv}(-\sigma)$, 可以导出

$$\begin{aligned} S_{ww}(\sigma) &= S_{uu}(\sigma) + S_{vv}(\sigma) + 2Q_{uv}(\sigma), \\ S_{ww}(-\sigma) &= S_{uu}(\sigma) + S_{vv}(\sigma) - 2Q_{uv}(\sigma). \end{aligned}$$

二式相减, 得到

$$Q_{uv}(\sigma) = \frac{S_{ww}(\sigma) - S_{ww}(-\sigma)}{4}. \quad (1)$$

式中, $S_{ww}(\sigma)$ 和 $S_{ww}(-\sigma)$ 分别是 $w(t)$ 的功率谱 $S_{ww}(\omega)$ 于 $\omega > 0$ 和 $\omega < 0$ 的部分. 只需计算出 $S_{ww}(\omega)$ 的最大熵谱估计, 便可由式 (1) 得出异相谱 $Q_{uv}(\sigma)$ 的估计.

为求同相谱 $C_{uv}(\sigma)$, 可先将 $u(t)$ 在频率域进行 90° 移相. 设 $U(\omega)$ 是 $u(t)$ 的富里叶-斯梯阶变换, 有

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dU(\omega), \quad (2)$$

在频率域 90° 移相, 有

$$dU'(\omega) = \begin{cases} dU(\omega) e^{-i\frac{\pi}{2}}, & \omega > 0 \\ dU(\omega) e^{i\frac{\pi}{2}}, & \omega < 0 \end{cases} \quad (3)$$

由逆交换，有

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dU'(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} dU(\omega) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} dU. \end{aligned} \quad (4)$$

上述 90° 移相，在时间域就是Hilbert变换（见文献〔3〕第355页）。我们注意到，采用离散Hilbert变换〔4〕要损失样本序列前后两头部分数据。如果两样本序列其一较长，对它在时间域作离散Hilbert变换是再好不过的了。若非如此，在实际计算中可把移相放在频率域里进行。

设 $w'(t) = u'(t) + iv(t)$ ，则得到

$$Q_{u',v}(\sigma) = \frac{S_{w'w'}(\sigma) - S_{w'w'}(-\sigma)}{4}, \quad (5)$$

下面证明 $C_{u,v}(\sigma) = -Q_{u',v}(\sigma)$ 。

由交叉谱定义

$$S_{u,v}(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi} E[dU^*(\sigma) dV(\sigma)]$$

和

$$\begin{aligned} S_{u',v}(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{2\pi} E[dU'^*(\sigma) dV(\sigma)] \\ &= \frac{1}{2\pi} E[dU^*(\sigma) dV(\sigma)] e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

得

$$S_{u',v}(\sigma) = S_{u,v}(\sigma) e^{i\frac{\pi}{2}},$$

即

$$\begin{aligned} C_{u',v}(\sigma) - iQ_{u',v}(\sigma) &= [C_{u,v}(\sigma) - iQ_{u,v}(\sigma)]i \\ &= Q_{u,v}(\sigma) + iC_{u,v}(\sigma). \end{aligned}$$

所以

$$C_{u',v}(\sigma) = -Q_{u',v}(\sigma). \quad (6)$$

由式(5)、(6)可得同相谱

$$C_{u,v}(\sigma) = -\frac{S_{w'w'}(\sigma) - S_{w'w'}(-\sigma)}{4}. \quad (7)$$

式中， $S_{w'w'}(\sigma)$ 和 $S_{w'w'}(-\sigma)$ 分别是 $w'(t)$ 的功率谱 $S_{w'w'}(\sigma)$ 于 $\omega > 0$ 和 $\omega < 0$ 的部分。只计算出 $S_{w'w'}(\omega)$ 的最大熵谱，即可由式(7)得出同相谱 $C_{u,v}(\sigma)$ 的估计。

由于仅计算一次最大熵谱，即只使用一个过滤器，只需要一次定阶，故该方法比Ulrych的方法估计的效果要好，精度会显著提高。但是，此方法不适用复过程，这点不及Ulrych的方法。

二、实例计算

(一) 计算用资料

本文采用上述公式进行了实例计算。所用资料为东海长江口中 美 联 合 调 查 M4 测 站 (31°15.0'N, 122°46.4'E) 44米层海流流速北分量与 M7 测 站 (30°20.6'N, 123°26.2'E) 45米层海流流速北分量的安得拉海流计实测数据, 资料的时间长度约为10天, 取样间隔为5分钟, 测量时间是1981年8月上旬。

(二) 有关说明

对复值序列的最大熵谱计算, 本文采用 Mcdonough^[5] 的公式。计算时, 频率步长选取为

$$\Delta\omega = 2\pi / (4N\Delta t),$$

这里, N 是样本数, Δt 是取样时间间隔。该频率步长很小, 它仅是两条谱线的分辨极限^[6]

的四分之一。在作谱估计前, 对资料作了低通滤波处理, 所用低通滤波器的算子为 $\frac{1}{6^{2.7}}$

$\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_7$ ^[6]。90°移相是在滤波前进行的。

90°移相用到富氏变换和逆变换。计算表明, 样本序列单纯作了富氏变换和逆变换(未移相)以后, 其最大熵谱与原序列的最大熵谱几乎完全相同, 误差不超过千分之一。此外, 90°移相并不增加太多机时。调用快速富氏变换子程序完成整个移相过程, 在 IBM4341 计算机上, 对3000个数据移相只耗用10秒 CPU 时间。

从理论上讲, 一序列90°移相后谱密度不变, 即 $S_{u,u}(\sigma) = S_{v,v}(\sigma)$ 。并且, 因 $w(t)$ 和 $w'(t)$ 的功率谱具有关系式

$$\begin{aligned} S_{ww}(\sigma) + S_{w'w'}(-\sigma) &= S_{u,u}(\sigma) + S_{v,v}(\sigma), \\ S_{w'w'}(\sigma) - S_{ww}(-\sigma) &= S_{u,v}(\sigma) + S_{v,u}(\sigma), \end{aligned}$$

由此可知,

$$S_{ww}(\sigma) + S_{w'w'}(-\sigma) = S_{w'w'}(\sigma) + S_{ww}(-\sigma),$$

对此关系式符合程度如何可作为计算成功与否的一个判据。本例最大熵谱计算结果对上式符合良好, 故认为计算是成功的。另外, 本例计算谱峰位置误差不超过 $2\Delta\omega$ ($\Delta\omega = 2\pi / (4N\Delta t)$ 是频率步长)。

(三) 定阶方法

由于海流谱频域宽、谱峰较多, FPE定阶技术^[7]不适用。本文采用经验方法定阶, 并采用 P/\hat{R}_0 值作为定阶合适与否的判据。这里,

$$P/\hat{R}_0 = \left[\sum_i \hat{S}(\omega_i) \Delta\omega - \hat{R}_0 \right] / \hat{R}_0,$$

P/\hat{R}_0 值越小, 说明对公式

$$R_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

所表示的能量拟合得越好。

(四) 计算结果

计算结果如图 1 所示。图中实线为同相谱估计曲线，虚线为异相谱估计曲线。从图中可以看到，半日分潮、全日分潮、周期约为 7—8 天的低频波动是明显的峰值。

以同相谱、异相谱估计曲线的对应谱峰为基准，进行适当平滑，再计算位相。发现，对 M_2 分潮来说，M7 测站比 M4 测站的位相超前约 15° ，换算成时间，则超前约 0.5 小时，这与 M_4 分潮（1/4 日浅水分潮，图中未画）超前约 0.53 小时的计算值基本是一致的。对周期约 7—8 天的低频波动来说，M7 测站比 M4 测站的位相超前约 56° ，换算成时间，超前约 28 小时。两测站经向距离 100 千米，若认为该低频波动是向正北传播的，那么它的波长约 600 千米。

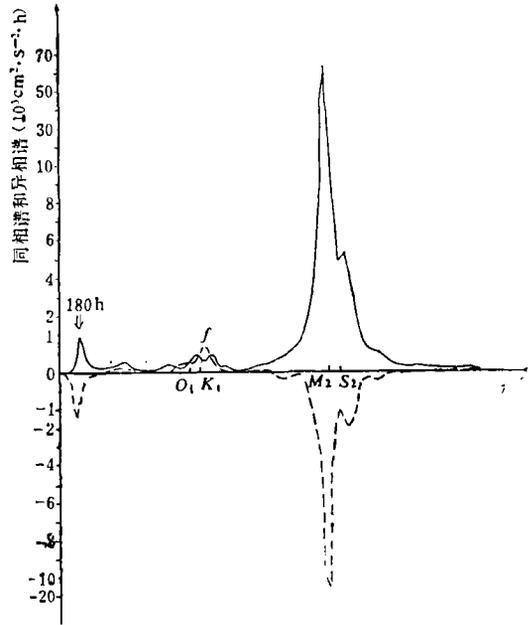


图1 使用最大熵方法估计的同相谱和异相谱
 $N=226$, 阶 $M=113$, $\Delta t=1.0$ h, $\Delta\omega=2\pi/(4N\Delta t)$,
 实线为同相谱 ($\widehat{R}_0=931$ cm²/s², $P/\widehat{R}_0=0.5\times 10^{-2}$)
 虚线为异相谱 ($\widehat{R}_0=921$ cm²/s², $P/\widehat{R}_0=0.25\times 10^{-2}$)

参 考 文 献

- (1) Ulrych, T. and O. Jensen, Cross-spectral analysis using maximum entropy, *Geophysics*, 39(1974), 3: 353—354.
- (2) Hayashi, Y., Space-time power spectral analysis using the maximum entropy method, *J. Meteor. Soc. Japan*, 55(1977), 415—420.
- (3) Papoulis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill Book Company, 1965, 355, 468.
- (4) 王天禧, 希尔伯特变换方向滤波, 遥感技术研究与应用资料汇编, 科学技术文献出版社, 1984.
- (5) McDonough, R. N., Maximum-entropy spatial processing of array data, *Geophysics*, 39(1974), 843—851.
- (6) Godin, G., *The Analysis of Tides*, University of Toronto Press, 1972.
- (7) Ulrych, T. J. and T. N. Bishop, Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition, *Rev. Geophys. and Space Phys.*, 13(1975), 1: 183—200.