第9卷 第5期　　海 洋 学 报　　Vol.9, No.5
1987年9月　　ACTA OCEANOLOGICA SINICA　　September, 1987

用最大熵方法估计海流旋转谱

余宙文　　刘玉光　蒋松年

(山东海洋学院物理海洋与海洋气象系，青岛)　　(国家海洋局海洋科技情报研究所，天津)

摘　要

本文将最大熵方法首次应用于海流旋转谱的估计．考虑到海流谱频域宽、谱峰多的特点，本文采用经验方法定阶，并提出了一个检验定阶是否合适的判据．在实例计算中，根据1980—1981年东海中美联合实测海流数据，在旋转谱分析基础上．阐述了所在海域关于潮流、惯性振荡、低频流的一般规律及某些特殊现象．

在气象学与海洋学领域，经常需要研究受地转、涡旋或地形影响的大、中尺度运动．在这种运动中，客观上存在着逆时针方向旋转与顺时针方向旋转的不对称性．分析与这种运动对应的速度向量随机过程，采用旋转谱的分析方法，可以直接地揭示其内部结构．

在具体的谱估计方法上，人们早已熟知利用自协方差函数的富氏变换估计谱的方法和周期图谱估计方法．事实上，客观实际广泛地存在着某一类随机过程，它所对应的随机序列，可用高阶的平稳自回归序列（AR序列）近似地模拟．对于这一类随机过程，用最大熵方法进行谱估计，具有精度高（包括谱峰位置准确、谱峰分辨率高、谱峰下的面积与实际能量拟合得好等）和特别适于估计长周期信号等优点．对于海浪，Holm等[1]和徐洪达等[2]已作出最大熵谱估计的研究；对于海流等速度向量随机过程，用最大熵谱估计的研究尚未见到．本文用最大熵方法估计实测海流数据的旋转谱，以探讨其可行性．

一、单一速度向量随机过程的旋转谱

设$w(t)=u(t)+iv(t)$是一均值为0的平稳速度向量随机过程，它的内自相关函数[3]被定义为

$$R_{ww}(\tau)=Ew^*(\tau)w(t+\tau), \qquad (-\infty<\tau<\infty)$$

式中，*表示共轭运算，E表示求期望的运算．

内自谱被定义为$R_{ww}(\tau)$的富氏变换，即

$$S_{ww}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{ww}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \qquad (-\infty<\omega<\infty)$$

$w(t)$还可用富里叶-斯梯阶积分表示为

本文于1986年3月22日收到，修改稿于1986年7月15日收到．

$$w(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}dW(\omega),$$

式中，$W(\omega)$是$w(t)$的富里叶-斯梯阶变换（见文献〔4〕）. 在物理上，增量$dW(\omega)$可看作是和圆频率ω的微分相联系的复振幅. 这样，内自谱$S_{ww}(\omega)$又可定义为

$$S_{ww}(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}E|dW(\omega)|^2.$$

在物理上，$S_{ww}(\omega)d\omega$比例于在$d\omega$区间内、以角速度ω旋转的随机分向量所对应运动的平均动能或平均功率. 当$\omega=\sigma>0$时，常用$S_{ww}(\sigma)$代替$S_{ww}(\omega)$；当$\omega=-\sigma<0$时，常用$S_{ww}(-\sigma)$代替$S_{ww}(\omega)$，这样不必对$\omega>0$和$\omega<0$另加说明. Gonella[5]称$S_{ww}(\sigma)$为逆时针旋转谱，它乃沿逆时针方向旋转分向量对应的功率谱；称$S_{ww}(-\sigma)$为顺时针旋转谱，它乃沿顺时针方向旋转分向量对应的功率谱.

由上述定义可见，内自谱实质上就是$w(t)$的功率谱，故可将复值序列最大熵谱估计公式引用到内自谱的估计中来. 对于实过程，最大熵谱估计有YW算法和Burg算法[6]，Smylie等[7]把Burg算法推广到复过程，Mcdonough[8]把YW算法推广到复过程. 下面对Mcdonough算法作一介绍. 该算法的谱估计方差较小.

二、最大熵谱估计

（一）最大熵谱

对一取样间隔为Δt的复平稳随机序列$\{x_n\}$，若已知其自协方差函数的前$M+1$个值：

$$R_k=E(x_n^*-\overline{x})(x_{n+k}-\overline{x}),\qquad k=0,1,2,\cdots,M$$

如何估计谱$S(\omega)$呢？事实上，满足基本关系式

$$R_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t}S(\omega)e^{i\omega k\Delta t}d\omega,\qquad k=0,1,2\cdots,M$$

的$S(\omega)$是很多的. 最大熵谱估计提供的准则，是在满足上述基本关系式的谱中选择一个使谱熵

$$H(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t}\lg S(\omega)d\omega$$

达极大的谱. 可以证明，该谱恰是由R_0，R_1，R_2，…，R_M扩充出来的M阶平稳自回归序列（AR序列）的谱. 称该谱为原序列$\{x_n\}$的最大熵谱，并作为原序列真实谱的估计.

M阶复平稳AR序列的谱为

$$S(\omega)=\sigma_M^2\Delta t/|1+\sum_{k=1}^{M}a_k^{(M)}e^{i\omega k\Delta t}|^2,\tag{1}$$

式中，σ_M^2是M阶AR模型

$$x_n+\sum_{k=1}^{M}a_k^{(M)}x_{n-k}=w_n,\qquad(-\infty<n<\infty)$$

中不相关序列$\{w_n\}$的方差，$Ew^*_{n-j}w=\sigma_M^2\delta_{j,0}$，$(j\geqslant 0)$．$a_k^{(M)}$是$M$阶AR序列的自回归系数．若将AR模型看作预报模型，将$-\sum_{k=1}^{M}a_k^{(M)}x_{n-k}$看作是对$x_n$的预报，则$a_k^{(M)}$又被称为过滤器系数，$\sigma_M^2$又被称为预报误差的方差．它们由下面的矩阵决定

$$\begin{pmatrix} R_0 & R_1^* & R_2^* & \cdots & R_M^* \\ R_1 & R_0 & R_1^* & \cdots & R_{M-1}^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ R_M & \cdot & \cdot & \cdots & R_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a_1^{(M)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_M^{(M)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_M^2 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

显而易见，AR序列的谱，即原序列的最大熵谱，是自协方差函数的非线性变换．

（二）Mcdonough算法

运用Burg递推技术，把上面的矩阵中固定的阶M换成可变的阶m，令$m=1,2,\cdots,M$，可导出下列迭代公式

$$a_1^{(1)}=-R_1/R_0, \tag{2}$$

$$\sigma_1^2=R_0(1-|a_1^{(1)}|^2), \tag{3}$$

$$a_m^{(m)}=-\frac{1}{\sigma_{m-1}^2}\left[\sum_{k=1}^{m-1}a_k^{(m-1)}R_{m-k}+R_m\right], \tag{4}$$

$$a_k^{(m)}=a_k^{(m-1)}+a_m^{(m)}\left[a_{m-k}^{(m-1)}\right]^*, \tag{5}$$

$$\sigma_m^2=\sigma_{m-1}^2(1-|a_m^{(m)}|^2), \tag{6}$$

式中，$m=2，3，\cdots，M$．若已知自协方差函数R_0，R_1，R_2，$\cdots$，R_M，经过式（2）—（6）的迭代计算，即可求出自回归系数$a_1^{(M)}$，$a_2^{(M)}$，$\cdots$，$a_M^{(M)}$和方差σ_M^2，最后代入式（1）求得原序列的最大熵谱．

对于自协方差函数，用下式估计

$$\widehat{R}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-k}(x_n-\overline{x})^*(x_{n+k}-\overline{x}), \tag{7}$$

式中，$k=0，1，2，\cdots，M$．

三、实例计算

（一）定阶方法

计算最大熵谱，定阶的问题尚未最终解决．由于海流谱频域较宽、谱峰较多，FPE定阶技术[6]不适用．事实上，海流随机性不如海浪强，较适宜用高阶平稳自回归过程模拟，故本文采用经验方法定阶，并采用$P/\widehat{R}_0$作为定阶合适与否的判据．令

$$P/\widehat{R}_0=\left[\sum_i\widehat{S}(\omega_i)\Delta\omega-\widehat{R}_0\right]/\widehat{R}_0,$$

式中，$\widehat{R}_0$是样本方差，$\Delta\omega$是频率步长．$P/\widehat{R}_0$值越小，说明对公式

$$R_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\mathrm{d}\omega$$

所表示的能量拟合得越好．当$\Delta\omega=2\pi/(4N\Delta t)$（$N$是样本数，$\Delta t$是取样时间间隔)时，若$P/\widehat{R}_0$的量级大于$10^{-2}$，则说明定阶不合适，需要重新定阶．一般选阶在$N/2$—$N/3$之间进行．

显然，由于海流谱频域较宽、谱峰较多，只有保证总能量拟合得非常好，才可能做到每个谱峰与对应的能量拟合得较好．

经试验，当$P/\widehat{R}_0$量级不超过10^{-2}时，最大熵谱估计的效果较好．表现在：估计的谱峰位置相当准确，用分潮或外加信号进行检验，误差不超过$2\pi/(4N\Delta t)$；此外，谱峰大小也比较稳定，经适当平滑后，谱峰高度随定阶不同变化不大．

（二）计算结果

本文采用Mcdonough算法对1980—1981年长江口中美联合调查6个测站计15层的海流数据作了旋转谱估计．

图1是M1测站22米层海流的内自谱估计．所用资料预先经过低通滤波处理，滤波器算子符号为$\frac{1}{6^2\cdot 7}\mathscr{A}_6^2\mathscr{A}_7$和$\frac{1}{24^2\cdot 25}\mathscr{A}_{24}^2\mathscr{A}_{25}$[9]．由图可见，与黑潮相临的M1测站所在海域，其低频波动成分相当丰富，对应能量也相当大．

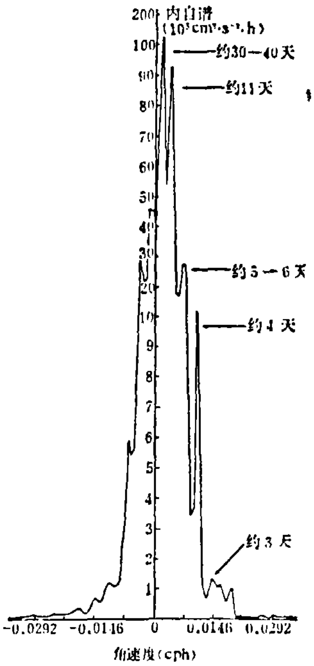

图1　使用最大熵方法估计的内自谱（低频流部分）
$N=50, M=25$．$\Delta t=14$ h，$\widehat{R}_0=0.61\times10^3\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}^2$，$P=0.834\times10^{-2}\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}^2$

图2是M1测站97米层海流的内自谱估计．其中，图2（a）是顺时针旋转谱的估计，图2（b）是逆时针旋转谱的估计．所用资料预先经过低通滤波，滤波器算子符号为$\frac{1}{6^2\cdot 7}\mathscr{A}_6^2\mathscr{A}_7$．由图可见，半日分潮谱峰显示得相当完美，惯性振荡谱峰也很明显．此外，1/4日浅水分潮的谱峰在高频段也是突出的（图中未画）．

经与传统方法估计的谱相比较，最大熵方法估计的谱分辨率明显提高（尤其是对低频长周期波动）．这与许多作者关于实值序列样本的分析结论是一致的，这里不再赘述．

（三）分析结果

对估计谱得出如下分析结果．

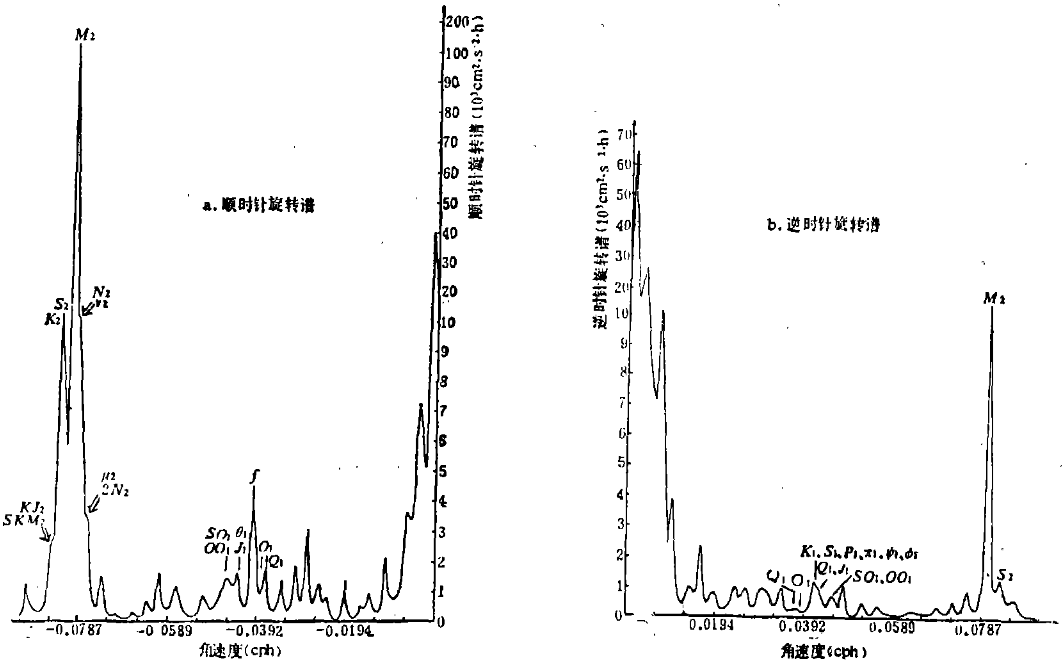

图2 使用最大熵方法估计的M1测站97米水深处的内自谱

$N=760$, $M=380$, $\Delta t=1.0$ h, $\hat{R}_0=0.482\times10^3\mathrm{cm^2/s^2}$, $P=0.317\times10^{-2}\mathrm{cm^2/s^2}$

关于潮流．一般规律是，所在海域半日分潮潮流以顺时针旋转谱分量占绝对优势，全日分潮潮流在外海几个测站表现为以顺时针旋转分量为主，在近海几个测站表现为以逆时针旋转分量为主．在长江口，各分潮潮流近似地表现为往复流．所在海域，半日分潮的平均动能显著地大于全日分潮的平均动能．在全日分潮中，K_1、P_1分潮的平均动能要大于 O_1、Q_1 的平均动能．并且，各分潮平均动能随深度增加而递减，随远离陆地而递减．

表1 M_2分潮潮流的能量统计

纬度	31°22.8′N		30°23.1′N		31°15.0′N			30°20.6′N		30°31.3′N			28°54.8′N		
经度	121°54.6′E		122°22.2′E		122°46.4′E			123°26.2′E		124°47.9′E			127°15.3′E		
测站名	RIVER		81215M2		M4			M7		M2			M1		
海底深(m)					49			61		50			188		
层次(m)	2.5	9.5	2.5	12.5	3	26	44	4	45	14	34	45.2	22	97	177
逆时针旋转分量的平均能量 (cm²/s²)	316	148	17	4	16	8	5	3	2	0.7	0.9	0.7	0.5	1.2	10
顺时针旋转分量的平均能量 (cm²/s²)	316	109	349	87	133	100	40	76	36	156	107	83	11	9	37

特殊现象是，位于舟山群岛附近的81215M2测站，其全日分潮潮流在表层顺时针旋转，在底层逆时针旋转，这种旋转方向的“反转”现象在几个沿岸测站的浅水分潮潮流中也有

体现．其次，位于陆架边缘的M1测站，其半日分潮和1/4日浅水分潮的平均动能在底层最大，中上层较小，这种垂直能量分布意味着存在某种值得研究的机制．表1给出了半日分潮中M_2分潮潮流的能量统计．表中M2测站比M7测站平均动能大，可能与该站海底深度较小有关．

关于惯性振荡．除了位于长江口的RIVER测站以外，各测站表层存在相当大的惯性振荡．北纬30°左右是"临界"纬度，当地惯性频率恰与全日分潮重合，因此惯性内波极易生成．该海域惯性振荡的平均动能随着深度增加而迅速减小，这种垂直能量分布结构与西地中海情形类似[10]．此外，在M7测站（测量时间为8月上旬）4米层的顺时针旋转谱估计图中，出现了一个大谱峰，其中心频率（对应周期为22.8小时）高于当地惯性频率约3.9%，在临近的81215M2测站的12.5米层的谱图上，也有相同频率的小谱峰出现．究竟是惯性重力内波，还是台湾暖流影响所致，有待于进一步研究．

关于低频流．位于黑潮路径附近的M1测站和位于台湾暖流路径上的M7测站，低频波动较为显著，显然是黑潮与台湾暖流影响所致．通过各谱图比较，发现周期约为7—8天的低频波动较为普遍和显著，其中尤以M2测站最为明显．该低频流的速度旋转方向随地点不同而不同，它的平均动能随深度增加而递减，但减少得较缓慢．该低频流的能量量级相当于或者大于1/4日浅水分潮．通过进一步的交叉谱分析，发现该低频流在某些测站之间相关较强．

参　考　文　献

〔1〕 Holm, S. and J. M. Hovem, Estamation of scalar ocean and wave spectra by the maximum entropy method, *IEEE J. on Oceanic Engineering*, OE-4(1979), 3: 76—83.

〔2〕 徐洪达、吴秀杰，实测海浪数据的最大熵估计，黄渤海海洋，3 (1985) 2: 10—19.

〔3〕 Mooers, C. N. K., A technique for the cross spectrum analysis of pairs of complexed-valued time series, with emphasis on properties of polarized components and rotational invariants, *Deep-Sea Res.*, 20 (1973), 1129—1141.

〔4〕 Papoulis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Mcgraw-Hill Book Company, 1965, 468.

〔5〕 Gonella, J., A rotary-component method for analysing meteorological and oceanographic vector time series, *Deep-Sea Res.*, 19(1972), 833—846.

〔6〕 Ulrych, T. J. and T. N. Bishop, Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition, *Rev. Geophysics and Space Physics*, 13 (1975), 1: 183—200.

〔7〕 Smylie, D. E. *et al.*, Analysis of irregularities in the earth's rotation, *Methods in Computational Physics*, 13(1973), 391—430.

〔8〕 Mcdonough, R. N., Maximum-entropy spatial processing of array data, *Geophysics*, 39 (1974), 843—851.

〔9〕 Godin, G., *The Analysis of Tides*, University of Toronto Press, 1972.

〔10〕 Perkins, H., Inertial oscillations in the Mediterranean, *Deep-Sea Res.*, 19 (1972), 289—296.