

等深度旋转均匀流体的线性波动

II. 由静压假定滤掉的可能波动

余宙文

甘子钧

叶安乐

(山东海洋学院物理海洋
与海洋气象系, 青岛)

(中国科学院南海
海洋研究所, 广州)

(山东海洋学院物理海洋
与海洋气象系, 青岛)

摘 要

本文第一部分利用未作无旋和静压假定的线性波动方程求得了现有波动的统一解。本文的这一部分对未作静压假定的线性长波方程作了进一步讨论, 求得了 $\omega = f$ 时的所有解。也求得了 $\omega < f$ 时的一组解, 这组解类似于 $\omega > f$ 时的 Sverdrup 波和 Poincaré 波的统一解, 但它们代表的波动具有不同的速度铅直结构。这一组解不包含在作了静压假定的线性长波方程中, 因而被看作是被静压假定滤掉的可能波动。

本文的第一部分^[1], 在不作无旋假定和静压假定的条件下, 导出了旋转均匀流体的线性表面波动方程, 并由此方程求得了一个统一解, 它包括了在无旋和静压假定下导出的已知波动(各种短重力波、沟渠中的长波、Sverdrup 波和 Poincaré 波等), 另外也导出了 Kelvin 波。本文第一部分的结果也附带说明了, 研究短重力波时, 通常作出的无旋假定是不必要的, 而研究 Sverdrup 波等波动时可去掉静压假定而得出同样的结果。

本文的这一部分将对静压假定作进一步讨论。众所周知, 一个假定可能导致问题求解方便, 同时对于求得的解来说, 假定本身会带来一定的近似性; 在另一方面, 作出某一假定还常常引起一种“滤波”作用, 也就是说可能会把某一类本来存在的运动从解中“滤掉”, 例如假设科氏参数为常量就必然会把 Rossby 一类的解“滤掉”。那么, 对于静压假定, 除了导致求解 Sverdrup 波等波动时的方便并带来一定的近似性外, 有没有滤掉某种可能的波动呢? 本文将对没有静压假定的线性长波方程找出其所有的可能解, 从中的确看出一种解不包含在过去已有的解中, 它是因静压假定而被滤掉的。

因本文第一部分导得的基本方程(5)一(8)不适合于 $\omega = f$ 时的情形, 所以本文这一部分也附带地对 $\omega = f$ 的情形作了讨论, 求得了 $\omega = f$ 时的所有可能解, 这些解均包含在过去的已有解中, 从而间接地证明了一个事实: 在现有的假定下, $\omega = f$ 的线性波动只可能具有 Kelvin 波和惯性振荡的两种形式。

一、 $\omega = f$ 时的所有可能线性波动解

$$\text{令 } V = V_0(x, y, z)e^{ift}, \quad (1)$$

$$P = -\rho gz + P_0(x, y, z)e^{-ift}, \quad (2)$$

将以上两式代入本文第一部分的式(1)和式(2), 并写成分量形式, 便得到

$$-ifu_0 - fv_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$-ifv_0 + fu_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$-ifw_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

考虑到式(3)和(4)中, u_0 和 v_0 的系数行列式为零, 因此, 方程如有非零解的话, 必有

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} + i \frac{\partial P_0}{\partial y} = 0.$$

即 P_0 必须具备如下形式

$$P_0 = P_0(x + iy, z).$$

我们只考虑波动解, 如取波传播方向为 x 方向(坐标方向选择是人为的), 那么可取

$$P_0(x, y, z) = \bar{P}_0(z)e^{ik(x+iy)}, \quad (7)$$

$$u_0(x, y, z) = \bar{u}_0(z)e^{ik(x+iy)}, \quad (8)$$

$$v_0(x, y, z) = \bar{v}_0(z)e^{ik(x+iy)}, \quad (9)$$

$$w_0(x, y, z) = \bar{w}_0(z)e^{ik(x+iy)}, \quad (10)$$

其中 $k \geq 0$. 考虑到上面各式中含因子 e^{-ky} , 因此, 为了满足有界性条件, 只有如下两种情形才是可能的. 情形A: $k=0$; 情形B: 波动只存在于上半部水域, 或平行于传播方向的带形水域, 此时边界处法向速度为零的条件导致 $v_0 \equiv 0$. 下面我们分别讨论这两种情形的解.

情形A: $k=0$. 在式(7)–(10)中, 令 $k=0$, 并代入式(4)–(6)〔式(3)与式(4)等价〕, 易于求得

$$\bar{u}_0(z) = i\bar{v}_0(z), \quad \bar{w}(z) = 0, \quad \bar{P}_0(z) = 0,$$

$$\text{即 } u(x, y, z, t) = i\bar{v}_0(z)e^{-ift}, \quad (11)$$

$$v(x, y, z, t) = \bar{v}_0(z) e^{-i f t}, \quad (12)$$

$$w(x, y, z, t) = 0, \quad (13)$$

$$P(x, y, z, t) = -\rho g z. \quad (14)$$

显然，这是熟悉的惯性振荡解，其中任意函数 $\bar{v}_0(z)$ 依赖于具体情况。

情形 B: $\bar{v}(z) \equiv 0, k > 0$. 在式(7)–(10)中，令 $\bar{v}_0 \equiv 0$ ，并代入式(4)–(6)，然后利用海底运动学边界条件可求得最后的解为

$$u(x, y, z, t) = \frac{gka}{fchkd} e^{i(kx - ft)} e^{-kz} chk(z+d), \quad (15)$$

$$v(x, y, z, t) = 0, \quad (16)$$

$$w(x, y, z, t) = \frac{gka}{ifchkd} e^{i(kx - ft)} e^{-kz} shk(z+d), \quad (17)$$

$$P(x, y, z, t) = -\rho g z - \frac{\rho g a}{chkd} e^{i(kx - ft)} e^{-kz} chk(z+d), \quad (18)$$

式中 a 是对方程积分时引入的积分常数。由表面动力学边界条件和式(18)可求得相应的波面表达式为

$$\zeta(x, y, t) = a e^{i(kx - ft)} e^{-kz}. \quad (19)$$

由表面运动学边界条件可得弥散关系

$$f^2 = gkthkd. \quad (20)$$

显然，式(15)–(20)是本文第一部分的式(63)–(68)在 $\omega = f$ 时的特殊情形。不过应该注意，式(63)–(68)是依 $\omega \neq f$ 时的方程求得的。当 kd 很小时，式(15)–(20)即为频率等于惯性频率的 Kelvin 波。

至此，我们通过具体求解的方法证明了：对于密度均匀的等深旋转流体，频率 $\omega = f$ 的线性波动方程只有两种可能形式的解，一为代表惯性振荡的解，另一为代表 $\omega = f$ 的 Kelvin 波的解。也就是说，对于 $\omega = f$ 的情形，静压假定不会导致“滤波”的作用。

二、静压假定“滤掉”的可能波动解

考虑本文第一部分式(13)的常数为正数 $\omega^2(l^2)$ ，且 $\omega < f$ 的情形¹⁾。如果此时解存在的话，那么这个解不包含在静压假定下的方程的解中，也就是说，这个解是因静压假定而被“滤掉”的。此时得到的方程为

$$Y'' + l^2 Y = 0, \quad (21)$$

$$Z'' + \frac{\omega^2}{f^2 - \omega^2} (k^2 + l^2) Z = 0. \quad (22)$$

1) 从后面所得的解可看出，实际上可能有意义的情形可能只限于 $\omega < f$ ，且 $\omega \approx f$ 的情形。

$$\text{令 } r'^2 = \frac{\omega^2}{f^2 - \omega^2}, \quad (23)$$

$$m^2 = k^2 + l^2,$$

结合海面运动学边界条件、海面动力学边界条件和海底运动学边界条件，经过和本文第一部分类似的推导，可得如下的解

$$P(x, y, z, t) = (C_1 e^{i l y} + C_2 e^{-i l y}) e^{i(kx - \omega t)} \cos r' m(z+d) - \rho g z, \quad (24)$$

$$\xi(x, y, t) = \frac{\cos r' m d}{\rho g} (C_1 e^{i l y} + C_2 e^{-i l y}) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (25)$$

$$u(x, y, z, t) = -\frac{1}{\rho(\omega^2 - f^2)} [f(ilC_1 e^{i l y} - ilC_2 e^{-i l y}) + \omega k(C_1 e^{i l y} + C_2 e^{-i l y})] e^{i(kx - \omega t)} \cos r' m(z+d), \quad (26)$$

$$v(x, y, z, t) = \frac{1}{\rho(\omega^2 - f^2)} [-ifk(C_1 e^{i l y} + C_2 e^{-i l y}) - i\omega(C_1 i l e^{i l y} - C_2 i l e^{-i l y})] e^{i(kx - \omega t)} \cos r' m(z+d), \quad (27)$$

$$w(x, y, z, t) = -\frac{r' m}{i\omega\rho} [C_1 e^{i l y} + C_2 e^{-i l y}] e^{i(kx - \omega t)} \times \sin r' m(z+d), \quad (28)$$

$$\omega^2 = -gr' m \operatorname{tgr}' m d. \quad (29)$$

不难看出，除了深度衰减因子由双曲函数变成了三角函数、以及弥散关系不同外，式(24)一(29)与本文第一部分的式(23)一(28)是一样的。为了了解这两组解代表的波动的差别，让我们对弥散关系(29)作进一步讨论。

由式(29)可知，对于同一 ω ，可有不同的 m 与其对应，为了区别，将第 n 个 m 记为 m_n ，于是

$$\omega^2 = -gr' m_n \operatorname{tgr}' m_n d = -\frac{g}{d} r' m_n d \operatorname{tgr}' m_n d. \quad (30)$$

取大洋平均深度 $d=4000\text{m}$ ， $g=9.8\text{m/s}^2$ ，纬度 $\varphi=30^\circ$ ， ω 与 $m_n = \sqrt{k^2 + l_n^2}$ 的关系如下表所示（表中只列出 $\omega < f$ 且 $\omega \approx f$ 的有意义情形）。

表1 弥散关系(取 $d=4000\text{m}$ ， $g=9.8\text{m/s}^2$ ， $\varphi=30^\circ$)

ω/f	m_1	m_2
0.999	0.3515×10^{-4}	0.7030×10^{-4}
0.998	0.4975×10^{-4}	0.9950×10^{-4}
0.997	0.6097×10^{-4}	1.2195×10^{-4}
0.996	0.7046×10^{-4}	1.4092×10^{-4}
0.995	0.7884×10^{-4}	1.5767×10^{-4}

我们可以给出易于计算的近似弥散关系式。式(30)可以改写成

$$\omega^2 d/g = -r' m_1 d \operatorname{tgr}' m_1 d.$$

对于实际的海洋，上式左端是非常小的数，因此，右端的因子 $r' m_1 d$ 应为 $r' m_1 d = n\pi - \varepsilon_1$ ，其中 ε_1 也是非常小的数，因此 $r' m_1 d \approx n\pi$ ，即

$$m_1 \approx \frac{n\pi}{d} \frac{f}{\omega} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{f}\right)^2}. \quad (31)$$

于式(24)–(29)中令 $\frac{\cos r' m d}{\rho g} C_1 = a$ ， $C_2 = 0$ ，则相应的各式变成

$$\zeta(x, y, t) = a e^{i(kx + ly - \omega t)}, \quad (32)$$

$$u(x, y, z, t) = \frac{ga}{(\omega^2 - f^2) \cos r' m d} (ifl + \omega k) \times e^{i(kx + ly - \omega t)} \cos r' m(z + d), \quad (33)$$

$$v(x, y, z, t) = \frac{ga}{(\omega^2 - f^2) \cos r' m d} (-ifk + \omega l) e^{i(kx + ly - \omega t)} \times \cos r' m(z + d), \quad (34)$$

$$w(x, y, z, t) = -\frac{r' m ga}{i\omega \cos r' m d} e^{i(kx + ly - \omega t)} \sin r' m(z + d), \quad (35)$$

$$P(x, y, z, t) = \frac{\rho ga}{\cos r' m d} e^{i(kx + ly - \omega t)} \cos r' m(z + d), \quad (36)$$

$$\omega^2 = -gr' m \operatorname{tgr}' m d. \quad (37)$$

式(32)–(37)类似于本文第一部分的式(31)–(36)，也类似于本文第一部分讨论过的 Sverdrup 波的表达式(37)–(42)。但它们之间有差别。式(32)–(37)代表的波动与本文第一部分中的式(37)–(42)代表的 Sverdrup 波动的差别主要表现在如下三个方面：(1) Sverdrup 波的频率小于惯性频率 f ，而式(32)–(37)所代表的波动的频率大于惯性频率 f ；(2) 弥散关系不同；(3) 流场结构在铅直方向上的变化不同；对 Sverdrup 波来说，水平速度随深度不变，铅直速度随深度呈线性变化；而对式(32)–(37)代表的波动来说，水平速度随深度呈余弦式的变化，而铅直速度随深度呈正弦式的变化。图 1 给出了流场水平速度铅直结构的示意图，图中标以“S”的直线表示 Sverdrup 波处于某位相时，沿波向的速度分量 u （或横向的速度分量 v ）的铅直变化，而曲线 I 和曲线 II 则表示式(32)–(37)所示的波动在相应位相时的沿波向的速度分量 u （或横向速度 v ）的铅直变化（图中设 a 和 $|\omega - f|$ 相同）。曲线 I 相应于弥散关系 $\omega^2 = -gr' m_1 \operatorname{tgr}' m_1 d$ ，而曲线 II 相应于弥散关系 $\omega^2 = -gr' m_2 \times \operatorname{tgr}' m_2 d$ 。

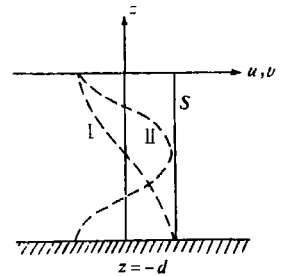


图 1

类似地, 如在式(24)一(29)中令 $C_1 = C_2 = \frac{\rho g a}{2 \cos r' m d}$, 则得到类似于本文第一部分的式(44)一(49)所代表的波动, 或本文第一部分所讨论过的浅水时的 Poincaré 波(50)一(55).

应该着重说明, 本节得到的波动解(24)一(29)是从未作静压假定的线性方程中求得的, 从数学和流体力学的观点来看, 它是可能存在的波动, 但是在静压假定条件下的线性方程中, 是不包含这一组解的, 所以说这一组解是被静压假定“滤掉”的. 另一方面, 从流体力学方程组求得的运动, 只是可能存在的运动, 不一定就在客观上存在, 在实际中发现了这种运动才是真正证明了它的存在. 所以, 我们把式(24)一(29)代表的波动称之为“可能”的波动. 尽管如此, 求得的式(24)一(29)有助于我们从实际观测中寻找这种波动. 由于海洋的复杂性和观测上的困难性, 有些海水运动就是先求得解而后才为观测所证实的, 例如边缘波.

形成式(24)一(29)代表的波动的条件与形成 Sverdrup 波或 Poincaré 波的条件应该是相同的, 所不同的只是频率 ω 是大于还是小于惯性频率的问题. 进一步从观测中证实式(24)一(29)代表的波动, 主要应依据这种波动的特点, 而最主要的是要在 $\omega < f$ 的波动中判断有没有象图 1 中曲线 I 和曲线 II 所代表的那类速度场结构.

附带地指出一个有趣的现象: 当 $\omega = 0$ 时, 解式(32)一(37)便退化为大家熟知的正压地转平衡的解. 例如, 令 $\omega = 0$, 取 $l = 0$ (即在原来的波动解中取 x 轴方向与波向一致), 在对各式取实部后便得

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos kx, \\ u &= 0, \\ v &= -\frac{1}{f} g a k \sin kx = \frac{1}{f} g \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \omega &= 0, \\ P &= \rho g a \cos kx = \rho g \xi. \end{aligned}$$

三、结 束 语

本文进一步对不作静压假定而导得的线性波动方程作了讨论. 对 $\omega = f$ 的情形找出了它的所有解, 从而证实了对 $\omega = f$ 的情形只存在两种波动(振动), 一是惯性振荡, 二是 $\omega = f$ 的 Kelvin 波. 另外求得了 $\omega < f$ 的一组解, 此解代表的波动与 $\omega > f$ 的 Sverdrup 波和 Poincaré 波类似, 但它们具有不同的速度场铅直结构. 这一组解不能从静压假定下的线性长波方程中求出, 所以认为是被静压假定“滤掉”的. 这一组解代表的波动之特点有助于观测资料的分析或从观测资料中寻找这种波动.

参 考 文 献

- [1] 余宙文、甘子钧、叶安乐, 等深度旋转均匀流体的线性波动 I, 海洋学报, 7(1985), 1: 1—11.