第4卷 第6期
1982年11月

海洋学报
ACTA OCEANOLOGICA SINICA

Vol.4, No.6
November, 1982

三维海流计算的一个方法

袁耀初　何魁荣

（国家海洋局第二海洋研究所）

一、引　言

我们曾应用有限元方法计算台湾以东海域黑潮的流速分布[1]．由于问题是三维的，又是四个未知量(u,v,w,p)，当计算较大的海域时，应用有限元方法得到最终的大型稀疏方程组的阶数甚高，相应矩阵的带宽较大，方程组又是非对称的，因此求解这样的方程组必须在容量较大、速度较快的大型电子计算机上进行．有没有别的方法避免这个困难呢？这就是本文问题的由来．

我们首先说明黑潮流经海域的某些特性．在文献[1]中，我们考虑了水平方向的湍流动量交换的影响，但计算结果与实际情况都表明，这个影响在黑潮区一般是较小的，因此本文不考虑这个因素，只考虑风的效应、垂直方向湍流动量交换、压力梯度等，在这种情况下，就有可能把精确解与有限元方法相结合，这就是本文发展的在密度连续变化情况下的三维海流计算的一个方法．在密度是常数的情况下，1957年Welander[2]作了在浅海情况下Ekman理论的某些推广，首先提出了速度的精确解公式．1969年Liggett等[3]在求解浅水密度均匀的湖泊环流的问题时，运用Welander得到的精确解，并引入流函数ψ，得出ψ方程式，然后对ψ方程式采用了差分方法求解．Gallagher等[4,5]分别在1973年与1975年对变深度密度均匀的湖泊环流的问题进行了有限元分析，他们对ψ方程式进行了有限元求解．1977年9月，我们完成了在密度连续变化情况下，用精确解与有限元方法相结合的海流计算公式的推导．在具体计算值水平速度数值时，遇到一些困难，这些困难在我们工作中已经克服了，并提出一套有效的近似计算公式．本文还对台湾以东的黑潮流经海域进行了计算，计算$A_z=1,10,100,300$(克/厘米·秒)，风速为5米/秒/180°等情况下的流场分布，并与其它方法进行比较，还对计算方法与结果进行了分析．

二、基本方程式与水平速度的解

首先建立坐标系，x轴正方向指向东，y轴正方向指向北，z轴正方向是与重力方向相反，这样可以建立三维海流的基本方程组：

本文1981年1月6日收到．

$$\left.\begin{aligned}
A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+f\rho v&=\frac{\partial p}{\partial x},\\
A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-f\rho u&=\frac{\partial p}{\partial y},\\
-\rho g&=\frac{\partial p}{\partial z},\\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0.
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

边界条件：

$$\left.\begin{aligned}
z=\zeta:\quad & A_z\frac{\partial u}{\partial z}=T_x,\\
& A_z\frac{\partial v}{\partial z}=T_y,\\
z=H:\quad & u=v=0.
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

引入复速度等量，

$$\left.\begin{aligned}
\overline{w}&=u+iv,\\
Y&=\frac{1}{A_z}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+i\frac{\partial p}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

$$a=\sqrt{\frac{f\rho}{2A_z}},\qquad j^2=(1+i)^2a^2=i\frac{f\rho}{A_z}\tag{4}$$

(1)，(2)分别化为：

$$\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial z^2}-j^2\overline{w}Y=.\tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
A_z\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\bigg|_z&=T=T_x+iT_y,\\
\overline{w}\Big|_{z=H}&=0.
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

解$\overline{w}$方程式，并分为实部与虚部得出：

$$u=\frac{(T_x+T_y)[\operatorname{sh}az\cos a(2H-z)-\operatorname{sh}a(2H-z)\cos az]}{2aA_zM}$$

$$+\frac{(T_x-T_y)[\operatorname{ch}a(2H-z)\sin az-\operatorname{ch}az\sin a(2H-z)]}{2aA_zM}$$

$$-\frac{g}{a^2A_z}\frac{N_3-N_2}{M}\int_\zeta^H[\operatorname{ch}a(H-z)\cos a(H-z)\frac{\partial\rho}{\partial x}-\operatorname{sh}a(H-z)\sin a(H-z)$$

$$\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}]dz-\frac{g}{2a^2A_z}\int_{\zeta}^{z}[\mathrm{ch}\,a(z-z')\cos a(z-z')\frac{\partial\rho}{\partial y}+\mathrm{sh}\,a(z-z')\sin a(z-z')$$

$$\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}]dz'+\frac{g}{a^2A_z}\left(\frac{N_1+N_4}{M}\right)\int_{\zeta}^{H}[\mathrm{ch}\,a(H-z)\cos a(H-z)\frac{\partial\rho}{\partial y}$$

$$+\mathrm{sh}\,a(H-z)\sin a(H-z)\frac{\partial\rho}{\partial x}]dz+\frac{N_2-N_3}{a_2A_zM}\left(\frac{\partial p_a}{\partial x}+\rho_0g\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right.$$

$$\left.-g\int_0^H\frac{\partial\rho}{\partial x}dz\right)+\frac{N_1+N_4}{a^2A_zM}\left(\frac{\partial p_a}{\partial y}+\rho_0g\frac{\partial\zeta}{\partial y}-g\int_0^H\frac{\partial\rho}{\partial y}dz\right)$$

$$-\frac{1}{2a^2A_z}\left(\frac{\partial p_a}{\partial y}+\rho_0g\frac{\partial\zeta}{\partial y}-g\int_0^z\frac{\partial\rho}{\partial y}dz'\right), \tag{7}$$

$$v=\frac{(T_x-T_y)[\mathrm{sh}\,a(2H-z)\cos az-\mathrm{sh}\,az\cos a(2H-z)]}{2aA_zM}$$

$$+\frac{(T_x+T_y)[\mathrm{ch}\,a(2H-z)\sin az-\mathrm{ch}\,az\sin a(2H-z)]}{2aA_zM}$$

$$-\frac{g}{a^2A_2}\frac{N_3-N_2}{M}\int_{\zeta}^{H}[\mathrm{ch}\,a(H-z)\cos a(H-z)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\mathrm{sh}\,a(H-z)$$

$$\cdot\sin a(H-z)\frac{\partial\rho}{\partial x}]dz-\frac{g}{a^2A_z}\frac{N_1+N_4}{M}\int_{\zeta}^{H}[\mathrm{ch}\,a(H-z)\cos a(H-z)$$

$$\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}-\mathrm{sh}\,a(H-z)\sin a(H-z)\frac{\partial\rho}{\partial y}]dz+\frac{g}{2a^2A_z}\int_{\zeta}^{z}[\cos a(z$$

$$-z')\mathrm{ch}\,a(z-z')\frac{\partial\rho}{\partial x}-\mathrm{sh}\,a(z-z')\sin a(z-z')\frac{\partial\rho}{\partial y}]dz'$$

$$+\frac{(N_2-N_3)}{a^2A_zM}\left(\frac{\partial p_a}{\partial y}+\rho_0g\frac{\partial\zeta}{\partial y}-g\int_0^H\frac{\partial\rho}{\partial y}dz\right)-\frac{(N_1+N_4)}{Ma^2A_z}\left(\frac{\partial p_a}{\partial x}\right.$$

$$\left.+\rho_0g\frac{\partial\zeta}{\partial x}-g\int_0^H\frac{\partial\rho}{\partial x}dz\right)+\frac{1}{2a^2A_z}\left(\frac{\partial p_a}{\partial x}+\rho_0g\frac{\partial\zeta}{\partial x}-g\int_0^z\frac{\partial\rho}{\partial x}dz'\right). \tag{8}$$

其中，

$$M=\frac{1}{r}=\cos2aH+\mathrm{ch}2aH, \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}N_1&=\cos aH\,\mathrm{ch}\,aH\cos az\,\mathrm{ch}\,az,\\N_2&=\cos aH\,\mathrm{cn}\,aH\sin az\,\mathrm{sh}\,az,\\N_3&=\sin aH\,\mathrm{sh}\,aH\cos az\,\mathrm{ch}\,az,\\N_4&=\sin aH\,\mathrm{sh}\,aH\sin az\,\mathrm{sh}\,az.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$\rho=\rho(S,T,P)$在不少文献中已给出关系。

三、ζ 方程式与垂直速度 w

设
$$\int_{\zeta}^{H}\overline{W}dz = S = S_x + iS_y, \tag{11}$$
$$\vec{S} = (S_x, S_y), \tag{12}$$
由全流连续方程式：
$$\nabla\vec{S} = \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = 0. \tag{13}$$

(7),(8)代入，经过具体运算以后，可以得出 ζ 方程式：
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)$$
$$= -\frac{1}{g\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\frac{\partial p_a}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta\frac{\partial p_a}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial p_a}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial p_a}{\partial x}\right)\right]$$
$$+ \mathrm{rot}_z\, m\vec{T} + \mathrm{div}\, n\vec{T} - \left(\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y}\right). \tag{14}$$

其中
$$\left.\begin{aligned}
m &= \frac{1}{2a^2A_z}(1 - 2r\,\mathrm{ch}\,aH\cos aH),\\
n &= \frac{1}{a^2A_z}r\sin aH\,\mathrm{sh}\,aH,\\
r &= \frac{1}{M},\\
\alpha &= \frac{\rho_0 g}{A_z}\left[\frac{(\mathrm{sh}2aH + \sin 2aH)\,r}{4a^3} - \frac{H}{2a^2}\right],\\
\beta &= \frac{\rho_0 g}{4a^3A_z}r(\sin 2aH - \mathrm{sh}2aH).
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}
\vec{T} &= (T_x, T_y),\\
\mathrm{rot}_z m\vec{T} &= \frac{\partial(mT_y)}{\partial x} - \frac{\partial(mT_x)}{\partial y},\\
\mathrm{div}\, n\vec{T} &= \frac{\partial(nT_x)}{\partial x} + \frac{\partial(nT_y)}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_4}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_5}{\partial x} + \frac{\partial F_6}{\partial y}\right). \tag{17}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{\beta}{\rho_0}\int_0^H\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)dz - \frac{gr^2}{2a^2A_z}\Big[(\mathrm{sh}^2 2aH$$

$$-\sin^2 2aH)\frac{\partial H}{\partial y}-2\text{sh}2aH\sin 2aH\frac{\partial H}{\partial x}\Big]\Big]\int_0^H\frac{\partial\rho}{\partial x}dz+\frac{gr^2}{2a^2A_z}\Big[(\text{sh}^2 2aH$$

$$-\sin^2 2aH)\frac{\partial H}{\partial x}+2\text{sh}2aH\sin 2aH\frac{\partial H}{\partial y}\Big]\Big]\int_0^H\frac{\partial\rho}{\partial y}\,dz-\Big[\frac{1}{\rho_0}\Big(\beta\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$-\alpha\frac{\partial H}{\partial y}\Big)-\frac{gH}{2a^2A_z}\quad\frac{\partial H}{\partial y}\Big]\frac{\partial\rho}{\partial x}\Bigg|_{z=H}-\Big[\frac{gH}{2a^2A_z}\quad\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{\rho_0}\Big(\beta\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$+\alpha\frac{\partial H}{\partial x}\Big)\Big]\frac{\partial\rho}{\partial y}\Bigg|_{z=H}. \tag{18}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial y}=-\frac{g}{2a^2A_z}\int_0^H dz\int_0^z\text{sh}\,a(z-z')\sin(z-z')\Big(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\Big)dz'$$

$$-\frac{g}{2a^2A_z}\int_0^H\Big\{\text{ch}\,a(H-z)\cos a(H-z)\Big[\Big(\frac{\partial H}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big)-\Big(\frac{\partial H}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial x}\Big)\Big]$$

$$+\text{sh}\,a(H-z)\sin a(H-z)\Big[\frac{\partial H}{\partial x}\quad\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\quad\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big]\Big\}dz. \tag{19}$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial x}+\frac{\partial F_6}{\partial y}=-\frac{gr^2}{a^2A_z}\int_0^H\Big[\frac{\partial H}{\partial x}\text{ch}\,a(H-z)\cos a(H-z)+\frac{\partial H}{\partial y}\text{sh}\,a(H-z)$$

$$\cdot\sin a(H-z)\Big]\Big[\text{sh}2aH\sin 2aH\frac{\partial\rho}{\partial x}-(1+\text{ch}2aH\cos 2aH)\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big]dz$$

$$+\frac{gr^2}{a^2A_z}\int_0^H\Big[\frac{\partial H}{\partial x}\text{sh}\,a(H-z)\sin a(H-z)-\frac{\partial H}{\partial y}\text{ch}\,a(H-z)$$

$$\cdot\cos a(H-z)\Big]\Big[\text{sh}2aH\sin 2aH\frac{\partial\rho}{\partial y}+(1+\text{ch}2aH\cos 2aH)\frac{\partial\rho}{\partial x}\Big]dz$$

$$-\frac{gr}{4a^3A_z}\int_0^H\Big(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\Big)\Big[\text{sh}2aH-\sin 2aH)\text{ch}\,a(H-z)\cos a\,(H-z)$$

$$-(\text{sh}2aH+\sin 2aH)\text{sh}\,a(H-z)\sin a(H-z)\Big]dz+\frac{gr}{2a^2A_z}\int_0^H\Big\{\Big[\text{ch}\,a(H$$

$$-z)\sin a(H-z)\text{sh}2aH+\text{sh}\,a(H-z)\cos a(H-z)\sin 2aH\Big]\Big[\frac{\partial H}{\partial x}\quad\frac{\partial\rho}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial H}{\partial y}\quad\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big]+\Big[\text{sh}\,a(H-z)\cos a(H-z)\text{sh}\,2aH-\text{ch}\,a(H-z)\sin a(H$$

$$-z)\sin 2aH\Big]\Big[\frac{\partial H}{\partial x}\quad\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\quad\frac{\partial\rho}{\partial x}\Big]\Big\}dz-\frac{gr}{4a^3A_z}\Big[(\text{sh}2aH$$

$$-\sin 2aH)\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\bigg|_{z=H}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\bigg|_{z=H}\frac{\partial H}{\partial y}\right)-(\mathrm{sh}2aH$$

$$+\sin 2aH)\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\bigg|_{z=H}\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial\rho}{\partial x}\bigg|_{z=H}\frac{\partial H}{\partial y}\right)\Big]. \tag{20}$$

垂直速度w：

$$w=-\int_H^z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz'. \tag{21}$$

可以把(7)，(8)代入(21)式，直接地写出w的显示表达式，由于公式较长，这里不再写出了.

四、水平速度的近似公式

如在引言中所述，在具体计算水平速度(7)、(8)时，将会遇到一些困难，本节将提出一套有效的近似公式.

在z方向的自变量区间$[0,H]$内，分成m段，每段以$(u_{i-1},\ u_i)$表示之，设$u_0=0$，$u_m=H$，这样在每段$(u_{i-1},\ u_i)$内，$\frac{\partial\rho}{\partial x}$与$\frac{\partial\rho}{\partial y}$近似地表示为：

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}\doteq c_{i-1}+d_i(u-u_{i-1}), \tag{22}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}\doteq e_{i-1}+f_i(u-u_{i-1}), \tag{23}$$

其中u为z方向的自变量.

当$|aH|>5$时，(22)、(23)代入公式(7)、(8)，经过运算以后，可以近似地得到水平速度u、v：

$$u=\frac{1}{2aA_z}\Big[(T_x+T_y)\cos az-(T_y-T_x)\sin az\Big]e^{az}$$

$$+\frac{1}{a^2A_z}\Big[e^{aH}(\sin aH\ \mathrm{ch}\,az\cos az+\cos aH\sin az\ \mathrm{sh}\,az)\left(\frac{\partial p_a}{\partial x}+\rho g\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right.$$

$$\left.-g\int_0^H\frac{\partial\rho}{\partial x}dz\right)+e^{aH}(\cos aH\cos az\ \mathrm{ch}\,az-\sin aH\sin az\ \mathrm{sh}\,az)\left(\frac{\partial p_a}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\rho_0g\frac{\partial\zeta}{\partial y}-g\int_0^H\frac{\partial\rho}{\partial y}dz\right)\Big]-\frac{1}{2a^2A_z}\left(\frac{\partial p_a}{\partial y}+\rho_0g\frac{\partial\zeta}{\partial y}-g\int_0^z\frac{\partial\rho}{\partial y}dz'\right)$$

$$+\frac{g}{4a^3A_z}e^{az}\Big[(\cos az-\sin az)\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_{z=0}-(\cos az+\sin az)\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_{z=0}\Big]$$

$$- \frac{g}{4a^4 A_z}\left\{ \sum_{i=1}^{n} e^{az}\Big[(\mathrm{ch}\, au \cos az \sin au + \mathrm{sh}\, au \sin az \cos au) f_i \right.$$

$$+ (\mathrm{ch}\, au \sin az \sin au - \mathrm{sh}\, au \cos az \cos au) d_i \Big] \Big|_{u_{i-1}}^{u_i} + \sum_{i=n+1}^{m} e^{au}$$

$$\cdot [(\mathrm{ch}\, az \sin au \cos az + \mathrm{sh}\, az \sin az \cos au) f_i + (\mathrm{sh}\, az \sin az \sin au$$

$$- \mathrm{ch}\, az \cos au \cos az) d_i] \Big|_{u_{i-1}}^{u_i} - \sum_{i=1}^{m} e^{a(2H-u)} \mathrm{ch}\, az [\cos a(2H$$

$$\left. - u - z) d_i - \sin a(2H - u - z) f_i] \Big|_{u_{i-1}}^{u_i} \right\}. \tag{24}$$

$$v = \frac{1}{2aA_z}[(T_y - T_x)\cos az + (T_x + T_y)\sin az] e^{az}$$

$$+ \frac{1}{a^2 A_z}\Big[e^{aH}(\cos aH \sin az\, \mathrm{sh}\, az + \sin aH \cos az\, \mathrm{ch} az)\Big(\frac{\partial p_a}{\partial y} + \rho_0 g \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$- g \int_0^H \frac{\partial \rho}{\partial y} dz \Big) - e^{aH}(\cos aH \cos az\, \mathrm{ch}\, az - \sin aH \sin az\, \mathrm{sh}\, az)$$

$$\cdot \Big(\frac{\partial p_a}{\partial x} + \rho_0 g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - g \int_0^H \frac{\partial \rho}{\partial x} dz \Big)\Big] + \frac{1}{2a^2 A_z}\Big(\frac{\partial p_a}{\partial x} + \rho_0 g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$- g \int_0^z \frac{\partial \rho}{\partial x} dz' \Big) + \frac{g}{4a^3 A_z} e^{az} \Big[(\cos az - \sin az) \Big(\frac{\partial \rho}{\partial y} \Big)_{z=0} + (\cos az$$

$$+ \sin az)\Big(\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big)_{z=0} \Big] + \frac{g}{4a^4 A_z}\left\{ \sum_{i=1}^{n} e^{az} [(\mathrm{ch} au \cos az \sin au \right.$$

$$+ \mathrm{sh}\, au \sin az \cos au) d_i - (\mathrm{ch}\, au \sin az \sin au - \mathrm{sh}\, au \cos az \cos au) f_i] \Big|_{u_{i-1}}^{u_i}$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{m} e^{au} [(\mathrm{ch}\, az \sin au \cos az + \mathrm{sh}\, az \sin az \cos au) d_i$$

$$- (\mathrm{sh}\, az \sin az \sin au - \mathrm{ch}\, az \cos au \cos az) f_i] \Big|_{u_{i-1}}^{u_i} + \sum_{i=1}^{m} e^{a(2H-u)} \mathrm{ch}\, az$$

$$\left. \cdot [\sin a(2H - u - z) d_i + \cos a(2H - u - z) f_i] \Big|_{u_{i-1}}^{u_i} \right\}. \tag{25}$$

对于其它的 aH 值，我们也已得出水平速度 u 、 v 的近似公式，将在另一文中发表.

五、应用有限元方法求解

首先建立一个泛函关系．引入双线性泛函数 $B(\zeta,\eta)$：

$$B(\zeta,\eta) = \iint_\Omega \beta\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big) d\Omega + \iint_\Omega \alpha \Big(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$- \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big) d\Omega. \tag{26}$$

在上式与图1中，Ω是在$z=0$的平面上所考虑的海域，Γ是海域Ω的边界，$\vec{n}$为单位外法线方向矢量，$\vec{s}$为单位切向方向矢量，$\zeta=\zeta(x、y)$就是我们在(14)中需要求的解，$\eta(x、y)\in C^{(0)}$可以证明，ζ,η满足以下的泛函关系：

$$B(\zeta,\eta)=\iint_\Omega\left\{\frac{1}{\rho_0 g}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\frac{\partial p_a}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta\frac{\partial p_a}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial p_a}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial p_a}{\partial x}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\mathrm{rot}_z m\vec{T}-\mathrm{div}\, n\ \vec{T}+\left(\frac{\partial D_1}{\partial x}+\frac{\partial D_2}{\partial y}\right)\right\}\eta d\Omega+\int_\Gamma\psi\eta dl. \tag{27}$$

在边界Γ上，

$$\psi=\beta\frac{\partial\zeta}{\partial n}+\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial s}, \tag{28}$$

设

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}=P,\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial y}=Q, \tag{29}$$

$$B(\zeta,\eta)=\overline{B}(P,Q,\eta)=\iint_\Omega\beta\left(P\frac{\partial\eta}{\partial x}+Q\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)d\Omega$$
$$+\iint_\Omega\alpha\left(Q\frac{\partial\eta}{\partial x}-P\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)d\Omega, \tag{30}$$

则P、Q满足以下的泛函关系：

$$\overline{B}(P,Q,\eta)=\iint_\Omega\left\{\frac{1}{\rho_0 g}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\frac{\partial p_a}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta\frac{\partial p_a}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial p_a}{\partial y}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial p_a}{\partial x}\right)\right]-\mathrm{rot}_z m\vec{T}-\mathrm{div}\, n\ \vec{T}+\left(\frac{\partial D_1}{\partial x}+\frac{\partial D_2}{\partial y}\right)\right\}\eta d\Omega$$
$$+\int_\Gamma\psi\eta dl. \tag{31}$$

$$\iint_\Omega\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\eta d\Omega=0, \tag{32}$$

$$\psi=P[\beta\cos(n,x)-\alpha\cos(n,y)]+Q[\beta\cos(n,y)+\alpha\cos(n,x)]. \tag{33}$$

下面将建立有限元方程式．设闭区域$\overline{\Omega}=\Omega U\Gamma$，闭区域$\overline{\Omega}$的有限元模型是一个区域$\widetilde{\Omega}$(尽可能接近$\overline{\Omega}$)，$\widetilde{\Omega}$是$E$个子区域$\overline{\Omega}_e$之和，每个$\overline{\Omega}_e$是开区域$\Omega_e$的闭包，

即

$$\overline{\Omega}_e=\Omega_e U\partial\Omega_e,\qquad e=1,2\cdots,E$$
$$\widetilde{\Omega}=\bigcup_{e=1}^{E}\overline{\Omega}_e,$$
$$\Omega_e U\Omega_f=\phi\qquad(e\neq f).$$

在每个有限元Ω_e内(本计算取为三角形元，见图2)．

$$P^{(e)}=P_M^{(e)}\varphi_M^{(e)},$$
$$Q^{(e)}=Q_M^{(e)}\varphi_M^{(e)},$$

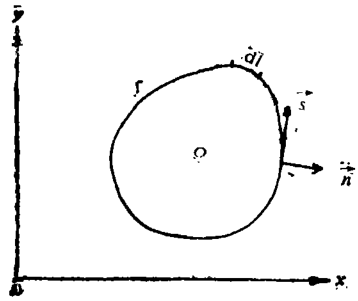

图 1

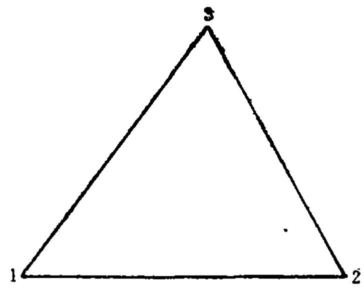

图 2

$$\eta^{(e)} = \eta_N^{(e)} \varphi_N^{(e)}. \tag{34}$$

$\varphi_M^{(e)}$，$\varphi_N^{(e)}$ 为形状函数，

$\eta_N^{(e)}$ 任意性(在三角形元，$M、N=1、2、3$)。

(34) 代入(31)、(32)，可以写出以下的有限元方程组(矩阵形式)：

$$\begin{bmatrix} [\lambda], & [\mu]_e \\ [\tau_2], & -[\tau_1]_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P]_e \\ [Q]_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\theta]_e + [\psi]_e \\ [0] \end{bmatrix}. \tag{35}$$

子矩阵 $[\lambda]$，$[\mu]_e$，$[\tau_2]_e$，$[\tau_1]_e$，$[\theta]_e$，$[\psi]_e$ 的矩阵元分别表示以下的各式：

$$\lambda_{MN}^{(e)} = \iint_{\Omega_e} (\beta \varphi_N^{(e)} \varphi_{M,x}^{(e)} - \alpha \varphi_N^{(e)} \varphi_{M,y}^{(e)}) d\Omega_e, \tag{36}$$

$$\mu_{MN}^{(e)} = \iint_{\Omega_e} (\beta \varphi_N^{(e)} \varphi_{M,y}^{(e)} + \alpha \varphi_N^{(e)} \varphi_{M,x}^{(e)}) d\Omega_e. \tag{37}$$

$$\tau_{2NM}^{(e)} = \iint_{\Omega_e} \varphi_N^{(e)} \varphi_{M,y}^{(e)} d\Omega_e, \tag{38}$$

$$\tau_{1NM}^{(e)} = \iint_{\Omega_e} \varphi_N^{(e)} \varphi_{M,x}^{(e)} d\Omega_e, \tag{39}$$

$$\theta_N^{(e)} = \iint_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{\rho_0 g} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta \frac{\partial p_a}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta \frac{\partial p_a}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial p_a}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha \frac{\partial p_a}{\partial x}\right) \right] - \mathrm{rot}_z m \vec{T} - \mathrm{div} n \vec{T} + \left(\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y}\right) \right\} \varphi_N^{(e)} d\Omega_e, \tag{40}$$

$$\psi_N^{(e)} = \int_{\Gamma(e)} \psi^{(e)} \varphi_N^{(e)} dl, \tag{41}$$

$$\varphi_{M,x} = \frac{\partial \varphi_M}{\partial x}, \qquad \varphi_{M,y} = \frac{\partial \varphi_M}{\partial y}, \quad \text{等等}. \tag{42}$$

按有限元理论，上述的方程组可以写成总的方程组(矩阵形状)：

$$\begin{bmatrix} [\Lambda], & [M] \\ [T_2], & -[T_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P] \\ [Q] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Theta] + [\psi] \\ [0] \end{bmatrix}. \tag{43}$$

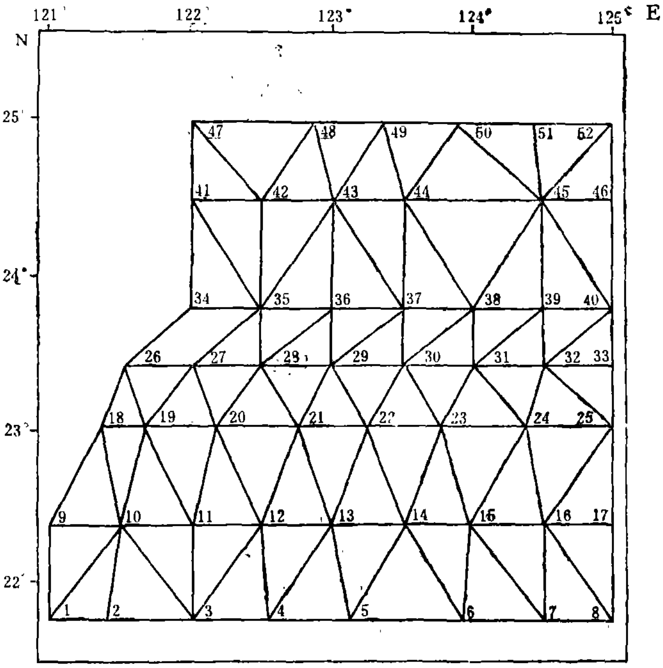

图 3 有限元平面分布图

方程式（43）的每一个子矩阵$[A]$，$[M]$，…… 与方程式(35)所相应的子矩阵$[\lambda]_e$，$[\mu]_e$，……的关系，按有限元理论给出，这里不需再写出．

边界条件可以采用以下几个方法：1.利用实测资料；2.对于具体海区，能否找到近似适用的ζ的导数的计算方法（例如最简单的动力计算方法）？3.对于具体海区的某些边界，从物理上，可以找到ζ的关系，例如在固体边界上等．

这里需指出，在我们的有限元方法中，对方程式（14）中的最高阶项 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)$、以及 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$等没有进行展开，这种作法是较好的．在 1976年 Su 等[6]对美国Okeechobee 湖的风生环流进行有限元分析时，也是采用这样的方法．

六、计算讨论与结果分析

现在把本方法应用于台湾以东的黑潮流速计算，计算海区是北纬 21°46′—25°，东经121°—125°，所需资料来自 Data Report CSK（黑潮及其邻近水域合作研究的资料报告）与 JMA（日本气象厅）资料，时间都是在 1966 年 7 月，风速W＝5 米/秒/180°，A_z＝1，10，100(克/厘米·秒)．

我们通过计算，归纳以下几点：

1.我们认为在风速 5—6 米/秒的情况下，取 A_z＝100 克/厘米·秒是较为适宜的．

2.在计算公式中，我们忽略了惯性力的影响，考虑了风的效应、垂直湍流动量交换、压力梯度、地形变化与气压变化等，由于资料不足，后面两个的影响，在具体数值计算中没有考虑，取$H=-800$(米)，P_a＝Const．计算表明，在黑潮海域，由于密度变化引起的流是主要的（占 90%以上），其它成分的，例如风引起的以及湍流摩擦对密度流的影响（只在 Ekman 层内）等，都是次要的(它们的总和占 10%以下)．这是符合实际情况的．

3.计算结果的流向趋势是较好的，主流偏西部，流向东北，东部有逆流．西部流速一

般比东部流速大，这都符合黑潮在该海区的实际情况．

4．通过计算，我们得到在海区北纬 22°20′—24°，东经 123°10′—124°30′，存在反气旋式涡旋(见图 4 — 8)，这与实际情况是符合的．

5．由图 4 — 8 可知，对于每一个垂直于 y 方向的断面，计算得到的在该断面上较大速度的节点位置，是较符合实际情况的．例如在平面节点 47 到 52 的断面上，最大流速出现在节点 48 (北纬 25°00′，东经122°48′)上，在表层，该节点的流速为 1.31 米/秒．

6．计算结果与动力计算进行比较，垂直于实测 (指T,S值) 断面的速度分量二方法的结果相差不大，且速度随深度的变化也较为一致．

7．本计算也存在以下的问题，有待以后进一步研究．

(1) 在某些断面上，由于没有实测的温盐资料，我们进行了内插，这样在一定程度上，会直接影响计算的结果，这一点待以后有这些断面的实测资料时，再进一步计算．

(2) 方程组(43)具有不对称等性质，为了进一步提高计算的精度，我们认为从数学角度上深入研究这种类型的方程式有很大的必要性，这工作待以后去做．

8．本计算方法(指方程组 (43) 的求解)采用高斯消去法，我们作了一个计算实例，证明随着网格大小的减少，收敛情况是好的，最后收敛于精确解．

最后，在作者修改本文时，看到景振华同志已正式发表题为“海流流速计算的研究”的论文[7]．该文有几点值得商榷：1)他设法提出一个较简单的、适用范围又较广的流速计算公式，这是好的．在他的论文中，他是国内首先把水平速度写成该文中的

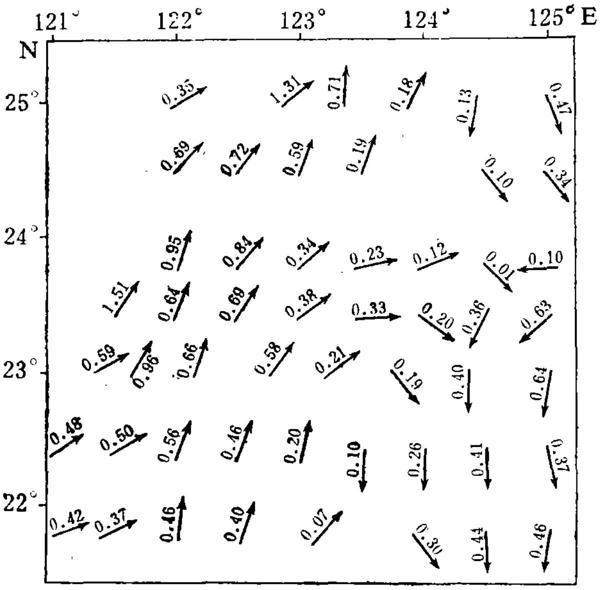

图 4　表层水平流速、流向分布图
(单位：米/秒)

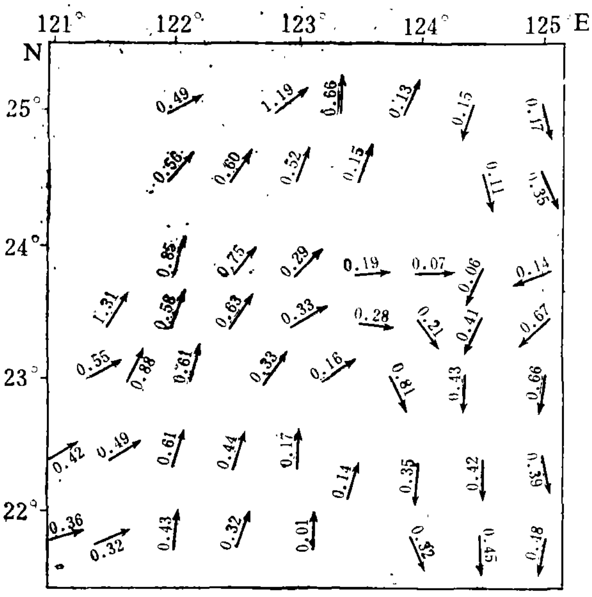

图 5　50 米层水平流速、流向分布图
(单位：米/秒)

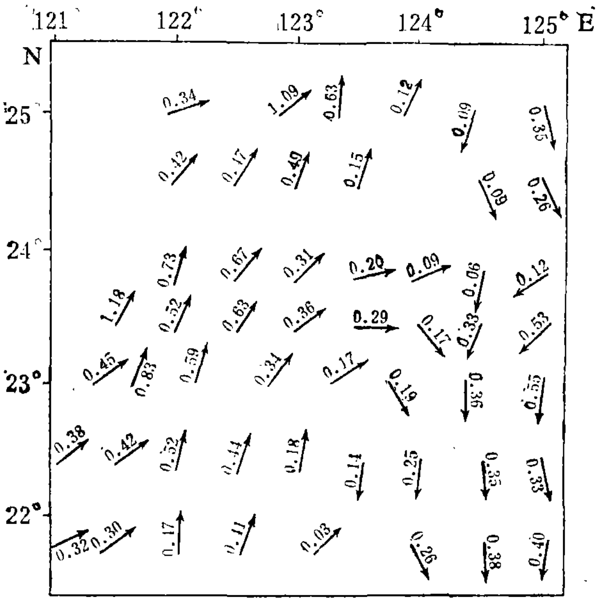

图 6 100 米层水平流速、流向分布图
(单位：米/秒)

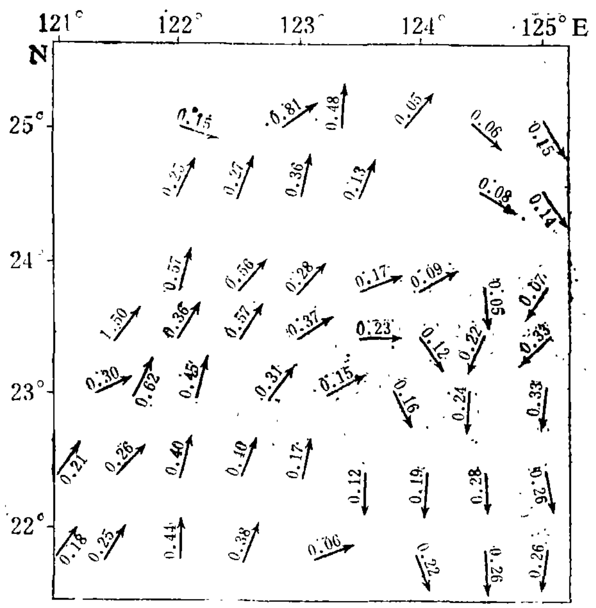

图 7 200 米层水平流速、流向分布图
(单位：米/秒)

(13)形式的，但具体作下去时，该文存在一些问题，例如该文的第二节（压强梯度的确定）的公式推导是错误的，因而其结论也是不对的。因为该文（35）式，在任何 aH 值下，由（38）式很容易再次得到（14）式．当 $aH\geq 3$ 时，(35)式按照该文在 $aH\geq 3$ 近似下的推导，得到（39）式．而该文的（14）式[1]若按照他在 $aH\geq 3$ 近似下的同样的推导方法，也是得出(39)式(这一点只要注意到(35)式是如何得到（36）式，就清楚了)．这就是说，在 $aH\geq 3$ 时，这两个式子也是一致的，是得不到结果(40)，(41)，(42)的．2)我们进一步分析由(40)，(41)，(42)式得出的水平速度的公式．首先，这表明完全地忽略了底部摩擦层．其次，从公式(41)、(42)可以知道，海面上的压力梯度与密度梯度流部分就是按照动力计算公式来计算的，在上层还考虑了风作用下的有限深度的 Ekman 公式．因此，这与以前的方法相比较，并未增加新的实质性内容．再者，在具体黑潮流速计算时，他取 $A_z=375$ 克/厘米·秒，我们认为取此值过大些．

本工作得到浙江省计算技术研究所大力协助，本计算程序是由钱文耀同志编的，为此，表示衷心感谢．作者于 1979 年 6 月在青岛举行的海洋水文动力学讨论会期间，曾分别与管秉贤、景振华同志进行了讨论；在本文修改时，与苏纪兰同志进行了非常有益的讨论．在讨论中他们提出许多宝贵意见，对于

1）(14) 式的最后项的积分号内的因子应是 $\frac{\partial \rho}{\partial x}+i\frac{\partial \rho}{\partial y}$，而不是 $\frac{\partial p}{\partial x}+i\frac{\partial p}{\partial y}$，这可能是排版上的错误.

他们的热忱支持谨致衷心感谢。

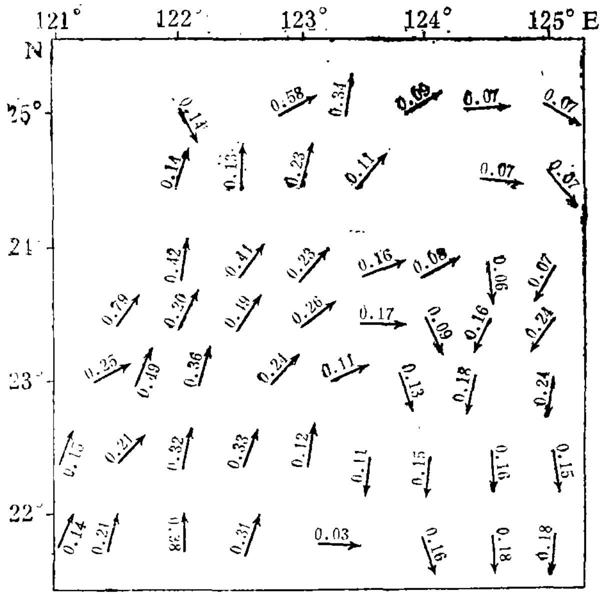

图 8　300 米层水平流速、流向分布图
（单位：米/秒）

主要符号的说明

1. u、v、w 分别表示海流的速度矢量在 x、y、z 方向上的分量
2. P:　海水的压力
3. P_a:　海水表面上的大气压力
4. ρ:　海水的密度
5. ρ_0:　海水表面的密度
6. T, S: 分别表示海水的温度与盐度
7. A_z:　海水的垂直的湍流动粘性系数
8. g:　重力加速度
9. f:　Coriolis 参数（$f=2\omega\sin\phi$）
10. H: 海水的深度 $H=H(x,y)$　$(H<0)$
11. T_x, T_y: 分别表示海表面上 x 方向与 y 方向的风应力
12. ζ:　海水表面相对于 $z=0$ 平面的相对高度 $\zeta=\zeta(x,y)$

另外，本文（四）中作了以下的约定，例如在 N 维空间中两个矢量 a, b 的点乘，写 $\sum_{i=1}^{N} a_i b_i = a_i b_i$，即 $a_i b_i$ 乘积，具有相同指标 i，意味着对 i 求和（$i=1,2,\cdots N$），略去符号 $\sum_{i=1}^{N}$，同样地对于张量乘法或者矩阵元之间的乘法，也作这样的约定.

参考文献

〔1〕袁耀初、许卫忆、何魁荣，海洋学报，2(1980)，2,7—18.

〔2〕Welander, P., *Tellus*, 9(1957), 45—52.

〔3〕Liggett, J.A., Hadjitheodorou, C., *Proc.ASCE.J.of the Hyd.Div.*, 95(1969), Hy2, 609—620.

〔4〕Gallagher, R.H., Liggett, J.A.and Chan, S.T.K., *Proc.J.of the Hyd.Div.*, 99(1973), Hy7, 1083—1096.

〔5〕Gallagher, R.H., *Finite Elements in Fluids*, John Wiley & Sons, 1(1975), 119—131.

〔6〕Su, Chih-Lan, James, H.P.and George, S., *Finite Elements in Water Resources*, Pentech Press, 4(1976), 113—123.

〔7〕景振华，海洋学报，3(1981)，1，1—13.