第4卷 第5期　　海　洋　学　报　　Vol.4, No.5
1982年9月　　ACTA OCEANOLOGICA SINICA　　September, 1982

层结流体中的非线性内波

刘式达　刘式适

(北京大学)

一、引　言

十多年来，用摄动法研究非线性波已经取得了相当大的成就. 在流体力学方面研究较多的是浅水表面波，在大气科学方面研究较多的是 Rossby 波. 对层结流体中的内波，则研究较少. 大家知道，海洋和大气都是密度随深度或高度变化的层结（分层）流体. 许多重要的自然现象，如台风、飑线、积云、湍流、海洋中的温跃层等，都和重力内波有关. 随着卫星技术的发展，非线性重力内波已经在大气和海洋中观测到[1, 2]. 从理论上研究非线性重力内波较早的是 Benney(1966)[3] 和 Benjamin(1966[4]，1967[5])，最近 Maslowe 和 Redekopp(1980)[6] 对层结剪切流动的非线性内波作了系统详细的研究. 但是，所有这些研究都是采用多尺度摄动法和约化摄动法. 这种方法比较烦琐，虽然非线性内波的振幅也满足 KdV 方程，其系数是一个积分，也是常常积不出的. 因而，所得结论不够明确. 我们曾设计[7] 了一种对非线性项作 Taylor 展开的方法，对大气中的各种重要波动求得了非线性的解析解，即椭圆余弦波（Cnoidal Wave）和弧立波(Solitary wave). 并得出了线性所没有的“振幅色散关系”，解释了大气中的一些现象. 本文就用这种方法对海洋和大气都重要的重力内波求其非线性解析解.

二、基本方程组

我们考虑密度层结为 $\overline{\rho}(z)$ 的 Boassinesq 流体的二维（x，z）运动，则描述层结流体的非线性重力内波的方程，可表示为[8]：

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\overline{\rho}}\ \frac{\partial p}{\partial x},\\ &\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{1}{\overline{\rho}}\ \frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\rho}{\overline{\rho}}g,\\ &\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}-\frac{N^2}{g}\overline{\rho}\,w=0,\\ &\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}=0. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

本文1981年8月14日收到.

其中，u、w分别是x、z方向的速度分量．p是气压，ρ是密度，g是重力加速度．$N = -\frac{g}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dz}$，$N$是Brunt-väisälä频率．方程组（1）的非线性项，主要取非线性平流项．

在线性情况下，方程组（1）可以求得线性重力内波的色散关系：

$$C^2 \equiv \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{N^2}{n^2+k^2}. \tag{2}$$

其中，k和n分别是x和z方向的波数，C是波速，ω是圆频率．

（2）式表征了线性内波的频散作用．如大家所熟知的N是重力内波的最大频率．由于重力内波是色散波，可以预料，加上非线性作用以后，可能产生非线性的孤立波．

三、非线性重力内波——椭圆余弦波

为了求非线性方程组（1）的波动解，我们设解是如下的波动形式：

$$u = U(\xi), \quad w = W(\xi), \quad p = P(\xi), \frac{\rho}{\bar{\rho}} = \Pi(\xi),$$
$$\xi = kx + nz - \omega t. \tag{3}$$

将（3）式代入方程组(1)，得到：

$$\begin{cases} (-\omega+kU)U' = -\frac{1}{\bar{\rho}}kP', \\ (-\omega+kU)W' = -\frac{1}{\bar{\rho}}nP' - g\Pi, \\ (-\omega+kU)\Pi' - \frac{N^2}{g}W = 0, \\ kU' + nW' = 0. \end{cases} \tag{4}$$

方程组（4）中符号“′”代表对ξ的导数．

（4）中的第一式乘以n减去（4）之第二式乘以k消去P'得到：

$$(-\omega+kU)(nU' - kW') = kg\Pi. \tag{5}$$

由（4）之第四式$W' = -\frac{k}{n}U'$代入（5）式，消去W'，得到：

$$(-\omega+kU)\left(nU' + \frac{k^2}{n}U'\right) = kg\Pi. \tag{6}$$

由（4）之第四式积分$W = -\frac{k}{n}U$(取积分常数为零）代入（4）之第三式得：

$$(-\omega+kU)\Pi' - \frac{N^2}{g}\left(-\frac{k}{n}U\right) = 0 . \tag{7}$$

若$(-\omega+kU)\neq 0$，则(6)、（7）式就构成U、Π的一阶常微分方程组：

$$\begin{cases} U' = \dfrac{kng}{(k^2+n^2)(-\omega+kU)}\Pi \equiv F(\Pi,U) \\ \Pi' = -\dfrac{kN^2}{ng(-\omega+kU)}U \equiv G(U) \end{cases} \tag{8}$$

式中$F(\Pi, U)$是Π、U的二元函数，$G(U)$是U的函数.

因为（8）式是非线性方程组，一般得不到解析解，为此，我们找到使U'、Π'同时为零的点，即$(\Pi=0, U=0)$，是力学上的平衡点. 我们可以将(8)式的右端非线性项F和G在平衡点（0，0）附近 Taylor 展开，得到：

$$\begin{aligned} U' &= -\frac{kng}{(k^2+n^2)\omega}\Pi - \frac{kn^2g}{(k^2+n^2)\omega^2}\Pi U + \cdots\cdots, \\ \Pi' &= \frac{kN^2}{ng\omega}U + \frac{k^2N^2}{ng\omega^2}U^2 + \cdots\cdots. \end{aligned} \tag{9}$$

（9）式右端若只取线性部分，则化成：

$$\begin{aligned} U' &= -\frac{nkg}{(n^2+k^2)\omega}\Pi, \\ \Pi' &= \frac{N^2k}{gn\omega}U. \end{aligned} \tag{10}$$

(10) 式即是（4）式线性化的结果. 由 (10) 式得到：

$$U'' + \frac{N^2k^2}{(n^2+k^2)\omega^2}U = 0 . \tag{11}$$

(11) 式即是波动方程，很容易看出色散关系：

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{N^2}{n^2+k^2}, \tag{12}$$

这就是（2）式.

若取（9）式右端到二次项，则（9）式可化为：

$$\begin{cases} U' = -\dfrac{ngk}{(n^2+k^2)\omega}\Pi - \dfrac{nk^2g}{(n^2+k^2)\omega^2}\Pi U, \\ \Pi' = \dfrac{N^2k}{gn\omega}U + \dfrac{N^2k^2}{gn\omega^2}U^2. \end{cases} \tag{13}$$

由于 (13) 式保留了二次项，因而代表了有限振幅重力内波.

为了求解 (13) 式，我们由（8）式得到相路方程：

$$\frac{dU}{d\Pi}=-\frac{n^2g^2}{N^2(n^2+k^2)}\ \frac{\Pi}{U}. \tag{14}$$

积分（14）式，得到：

$$\Pi^2+\frac{N^2(n^2+k^2)}{n^2g^2}U^2=D. \tag{15}$$

其中D是积分常数. （15）式说明，在相平面（Π，U）上，相路是一闭合的椭圆族.

假设N^2是常数，将（13）之第一式对ξ微商，并用（13）之第二式及（15）式，略去Π、U的三次乘积项，得到：

$$U''=-\frac{N^2k^2}{(n^2+k^2)\omega^2}U-\frac{3N^2k^3}{(n^2+k^2)\omega^3}U^2+\frac{n^2k^3g^2}{\omega^3(n^2+k^2)^2}D. \tag{16}$$

（16）式对ξ微商就得到著名的KdV方程：

$$U'''+\frac{6N^2k^3}{(n^2+k^2)\omega^3}UU'+\frac{N^2k^2}{(n^2+k^2)\omega^2}U'=0\ . \tag{17}$$

（16）、（17）二式就是有限振幅重力内波所满足的方程. 现在求解它.

将（16）乘以$2U'$，并对ξ积分：

$$U'^2=-\frac{2N^2k^3}{(n^2+k^2)\omega^3}U^3-\frac{N^2k^2}{(n^2+k^2)\omega^2}U^2+\frac{2n^2k^3g^2}{\omega^3(n^2+k^2)^2}DU+A. \tag{18}$$

其中，A是积分常数.

将（18）式写成如下形式：

$$U'^2=-\frac{2N^2k^3}{(n^2+k^2)\omega^3}H(U). \tag{19}$$

其中， $$H(U)=U^3+\frac{1}{2}\ \frac{\omega}{k}U^2-\frac{n^2g^2}{N^2(n^2+k^2)}DU+B. \tag{20}$$

是U的三次多项式，B是常数.

为了保证（18）式的解是有界的周期波动，$H(U)=0$的三个根必须是分离的单实根U_1、U_2和U_3.

对$\omega>0$，不妨设：

$$U_1>0,\ U_2<0,\ U_3<U_2<0. \tag{21}$$

此时（19）式的解可以用Jacobi椭圆函数Cn表示，即：

$$U(x,\ z,\ t)=U(\xi)=U_2+(U_1-U_2)Cn^2.\sqrt{\frac{N^2k^3}{2(n^2+k^2)\omega^2}(U_1-U_3)}\ (kx+nz-\omega t), \tag{22}$$

Cn^2在0和1之间振荡，（22）就是椭圆余弦波. 其波长是：

$$\lambda=\frac{2}{k}\sqrt{\frac{2(n^2+k^2)\omega^3}{N^2k^3(U_1-U_3)}}K(m). \tag{23}$$

其中，
$$K(m)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-m^2\sin^2 t}} \tag{24}$$

是第一种完全椭圆积分．模数m满足：

$$m^2=\frac{U_1-U_2}{U_1-U_3}. \tag{25}$$

在（20）式中，若令 $B=0$，则 $U_2=0$，且由根与系数之关系：

$$\begin{cases} U_1+U_3+=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega}{k}, \\ U_1U_3=-\dfrac{n^2g^2}{N^2(n^2+k^2)}D, \\ m^2=\dfrac{U_1}{U_1-U_3}, \end{cases} \tag{26}$$

求到：

$$(U_1-U_3)^2=(U_1+U_3)^2-4U_1\cdot U_3=\frac{\omega^2}{4k^2}+\frac{4n^2g^2}{N^2(n^2+k^2)}D, \tag{27}$$

$$U_1=m^2(U_1-U_3)=m^2\cdot\sqrt{\frac{\omega^2}{4k^2}+\frac{4n^2g^2}{N^2(n^2+k^2)}D}. \tag{28}$$

这样，椭圆余弦波（22）式可表示为：

$$u(x,z,u)=m^2\sqrt{\frac{\omega^2}{4k^2}+\frac{4n^2g^2}{N^2(n^2+k^2)}D}\cdot Cn^2\sqrt{\frac{N^2k^3}{2(n^2+k^2)\omega^3}(U_1-U_3)}(kx+nz-\omega t). \tag{29}$$

由（29）式看出，椭圆余弦重力内波的振幅（此时即 U_1）随着波速$\frac{\omega}{k}$的增加而增加．由(23)及(27)二式看出，椭圆余弦重力内波的波长λ也和波速$\frac{\omega}{k}$成正比．这些都是非线性重力内波的特色，也是和观测到的大气、海洋中的现象相一致的．所以也常把(28)式这种包含振幅、波速的关系，称为非线性重力内波的“振幅色散关系”，这正是和线性内波的频率色散关系不相同的地方．由（28）及(23)、(27)式还看出，非线性重力内波的振幅及波长都和N有关，这和 Maslowe[6] 的结论也一致，也和线性内波要求$\omega<N$有很大差别．

四、简谐波和孤立波

非线性椭圆余弦重力内波（22）式有两种特殊情况是值得我们重视的．

（一）线性简谐波（m→0）

（22）式中当 $U_1 \to U_2 \to 0$ 时，这代表椭圆余弦波的振幅是无限小的情况．由（25）式意味着 $m \to 0$．由（24）式 $K(0) \to \frac{\pi}{2}$，此时 Jacobi 椭圆余弦函数就化为余弦函数，即：

$$Cn(\quad) \to \cos(\quad) \quad (m \to 0). \tag{30}$$

（22）式化为：

$$u(x,z,t) = U_2 + (U_1 - U_2)\cos^2\sqrt{\frac{N^2k^3}{2(n^2+k^2)\omega^3}\,(U_1 - U_3)}\,(kx + nz - \omega t). \tag{31}$$

若用 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ 代入(23)，则：

$$\sqrt{\frac{N^2k^3}{2(n^2+k^2)\omega^3}\,(U_1 - U_3)} = \frac{1}{2}. \tag{32}$$

故利用三角公式，（31）式化为：

$$\begin{aligned} u(x,\ z,\ t) &= U_2 + (U_1 - U_2)\frac{1+\cos(kx+nz-\omega t)}{2} \\ &= \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_1 - U_2}{2}\cos(kx + nz - \omega t). \end{aligned} \tag{33}$$

（33）式正是线性重力内波的简谐波解．且由根与系数关系，据（20）式

$$U_1 + U_2 + U_3 = -\frac{1}{2}\ \frac{\omega}{k}, \tag{34}$$

故

$$U_3 \to -\frac{1}{2}\ \frac{\omega}{k}. \tag{35}$$

（35）式代入（32）式就导得（12）式，这是理所当然的结果．

（二）非线性孤立波（m→1）

（22）式中，当 $U_2 = U_3$ 时，由（25）式 $m \to 1$．这种情况是椭圆余弦波的另一种特殊情况．

令 $\xi \to \infty$ 时，$U \to U_0$，$\Pi \to 0$，$U' \to 0$，$U'' \to 0$，则由(15)、（16）式定出：

$$\left\{\begin{aligned} U_0 &= -\frac{\omega}{2k}, \\ D &= \frac{N^2(n^2+k^2)\omega^2}{4n^2g^2k^2}. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

由（18）式定出：

$$A=\frac{N^2}{4(n^2+k^2)},\tag{37}$$

由（20）式定出：

$$B=-\frac{\omega^3}{8k^3}.\tag{38}$$

这样（19）式可表示为：

$$U'^2=-\frac{2N^2k^3}{(n^2+k^2)\omega^3}\left(U+\frac{\omega}{2k}\right)^2\left(U-\frac{\omega}{2k}\right),\tag{39}$$

即 $H(U)=0$ 的三根为：

$$U_1=\frac{\omega}{2k}\qquad U_2=U_3=-\frac{\omega}{2k}.\tag{40}$$

注意到当 $m\to 1$ 时，椭圆余弦函数化为双曲正割函数，即：

$$\mathrm{cn}(\ \ )\to\mathrm{sech}(\ \ )\ .\tag{41}$$

那么，解（22）式可表示为：

$$u(x,z,t)=-\frac{\omega}{2k}+\frac{\omega}{k}\ \mathrm{sech}^2\frac{N}{\sqrt{2(n^2+k^2)}}\cdot\frac{k}{\omega}(kx+nz-\omega t)\tag{42}$$

（42）式就是非线性孤立重力内波的解．跟椭圆余弦波相似，孤立波的振幅和波速成正比，波宽 $d=\frac{\sqrt{2(n^2+k^2)\omega}}{Nk}$ 也和波速成正比，和 N 成反比．

最近，李麦村[9]对飑线的非线性研究，周明煜[10]等对夜晚边界层湍流团块结构的研究，都进一步证实了非线性重力内波的特点．

五、结　　论

像海洋和大气这样的层结（分层）流体，非线性重力内波具有振幅大、波长长、传播速度快等特点，波长和 N 成正比．

像大气中的飑线，积云都是具有强度大、移动快的特点，夜间层结稳定（N 大），观测到的尺度小的（波长小）湍流团块，都是非线性重力内波的表现．

非线性重力内波的研究对研究海洋和大气现象，对研究湍流都有重要意义．

关于有速度切变 $\overline{u}(z)$ 时的重力内波的非线性特点有待进一步研究．

参 考 文 献

〔1〕 Apel, J. R., *J. G. R.*, 80 (1975), 865—881.
〔2〕 Christie, D.R., *J. Atmos.Sci.*, 35 (1978), 805—825.
〔3〕 Benney, D.J., *J.Math.Phys.*, 45 (1966), 52—63.
〔4〕 Benjamin, T.B., *J.Flnid Mech.*, 29 (1966), 24—270.
〔5〕 Benjamin, T.B., *J.Fluid Mech.*, 30 (1967), 559—592.
〔6〕 Maslowe, S.A.and Redekopp, *L.G.*, *J.Fluid.Mech.*, 101 (1980), 321—348.
〔7〕 刘式达、刘式适，大气中的非线性椭圆余弦波和孤立波，中国科学（B辑），1982, 4, 372—384.
〔8〕 Yih, C.S., *Stratified flows*, Academic Press, New York, America, 19—218.
〔9〕 李麦村，大气中飑线形成的过程与KdV方程，中国科学，1981, 3, 341.
〔10〕 周明煜等，大气边界层中湍流场的团块结构，中国科学，1981, 5, 614.