

许洋, 王岗, 胡见. 基于势流理论的海脊俘获波产生条件与运动特性研究[J]. 海洋学报, 2026, 48(x): 1-8, doi:

Xu Yang, Wang Gang, Hu Jian. Occurrence Conditions and Propagation Characteristics of Trapped Waves over the Submerged Ridge Based on Potential Flow Theory[J]. Haiyang Xuebao, 2026, 48(x): 1-8, doi:

基于势流理论的海脊俘获波产生条件与运动特性研究

许洋¹, 王岗^{2,3*}, 胡见⁴

(1. 山东省交通规划设计院集团有限公司, 山东 济南 250101; 2. 河海大学 海岸灾害及防护教育部重点实验室, 江苏 南京 210024; 3. 河海大学 港口海岸与近海工程学院, 江苏 南京 210024; 4. 长江航运发展研究中心, 湖北 武汉 430014)

摘要: 大洋海脊能将海啸能量以俘获波的形式引导传播逾万公里, 并因其独特的运动机制携带大量能量影响到远海地区, 严重威胁沿岸工程及居民生命财产安全。本研究基于势流理论, 推导了表征台阶地形上俘获波的解析理论, 从数学上证实了台阶型海脊俘获波是由波浪在突变地形处的反射所诱发, 并进一步给出了波浪发生全反射时临界入射条件的具体表达式。结果表明, 低频波浪成分更易被台阶地形所俘获, 且随着入射角的增大, 俘获效应也愈发显著。本研究采用全水深势流理论框架, 突破了已有理论仅适用于浅水波海域的局限, 为分析实际陡峭海脊地形上的俘获波提供了可靠的理论依据。

关键词: 俘获波; 台阶型海脊; 解析解; 势流理论; 海啸

中图分类号: 文献标志码: A 文章编号: 0253-4193(2026)x-0001-08

1 引言

海啸作为最具破坏性的海洋灾害之一, 通常由海底地震、火山喷发或海底滑坡等触发, 具有波长长、周期大、传播速度快且能量耗散小的显著特征^[1]。海啸不仅会给近场地区带来灾害, 还会以越洋海啸的形式传播至数千公里乃至上万公里之外的远场沿岸地区, 造成严重灾害^[2]。大海啸对当地产生影响的同时, 还会影响到较远的区域形成越洋海啸^[3-4]。越洋海啸对远场的影响不仅和激发其产生的地震或火山的强度有关, 还与其传播路径上的地形密切相关^[5]。

海山、海丘、海岭、海沟、平原以及海脊是海底的主要组成部分, 其海脊对波浪的汇聚和俘获作用是越洋海啸能够传播数千公里并对远场地区构成灾害构成的主要原因^[6]。多场历史海啸的研究表明, 由于海脊对波浪的俘获和汇聚作用, 海啸波以俘获波的形式沿海脊传播至远场地区造成灾害, 且俘获波的传播速度显著慢于直接路径传播的先导波, 通常在先导波

经过数小时至十几小时后才到达^[7-15]。如 1945 年马克兰 (Makran) 海啸在默里 (Murray) 海脊的引导作用下, 海啸波抵达至卡拉奇 (Karachi) 和阿丘 (Achu)^[9]。2004 年印尼苏门答腊海域发生 9.1 级强烈地震, 引发印度洋大海啸, 造成印度洋周边国家超过 22 万人遇难。该海啸不仅对距离震源较近的印度洋东部和中部造成了严重影响, 还由于海脊的引导作用传播至西印度洋: 由西南印度洋海脊引导而至的俘获波约在先导波到达后的 5~10 小时传至南美洲东岸, 而由西南印度洋海脊和东太平洋海隆引导而至的俘获波约在先导波到达后的 15~24 小时抵达北美西岸^[10]。2006 年千岛群岛海域发生 8.1 级强烈地震 (后修正为 7.9 级), 引发越洋海啸。在科科平顶海山 (Koko Guyot) 和赫斯 (Hess) 海隆的引导作用下, 作用使得俘获波在先导波之后 2 个小时才抵达美国新月城 (Crescent City)^[15]。类似的海脊俘获波现象在 2011 年东日本大海啸中也得到了进一步证实^[2]。2018 年塔丁 (Tadin) 地震海啸中, 忠诚 (Loyal) 海脊和松岭 (Pine) 海脊的引

收稿日期: 2026-02-28; 修订日期: 2026-05-15。

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (51579090)。

作者简介: 许洋 (1994—), 男, 山东省日照市人, 主要从事海啸传播变形研究。E-mail: 653326021@qq.com

* 通信作者: 王岗 (1982—), 男, 河北省张家口市人, 教授, 主要从事波浪传播变形研究。E-mail: gangwang@hhu.edu.cn

导作用导致忠诚(Loyal)群岛和松岭(Pine)群岛附近出现异常较大的波动^[16]。

针对海脊俘获波的理论研究, Jones^[17] 首先从数学上证明了俘获波在顶部淹没的无限长海底山脊上的存在性。根据海脊剖面形状, 海脊俘获波可分为剖面地形连续型和不连续型两类: 连续型海脊(如抛物型、双曲余弦型等)上的俘获波主要由波浪折射所致, 而不连续型海脊(如台阶型)上的俘获波则主要由波浪在突变地形处的反射作用引起。Longuet-Higgins^[18] 在线性浅水假定的基础上, 给出了无限长台阶型海脊上俘获波的解析解。Buchwald^[19] 推导了两侧水深不等台阶型海脊上俘获波的频散关系。Miles^[20] 分别讨论了对称矩形海脊上奇、偶模态各自的频散关系并给出俘获波波面解析解。Mei^[21] 将海脊上俘获模态的推导过程类比于量子力学的一维有限深方势阱里的粒子运动^[22], 并对 Miles^[20] 的理论进行了分析总结。Shaw 和 Neu^[23] 总结了 Buchwald^[19] 和 Miles^[20] 的研究成果, 给出阶梯型剖面和三角形剖面海脊上俘获波解析解, 并详细讨论了频散关系、截止频率、相速度、群速度与地形的关系。对于缓变连续地形上的海脊俘获波, 梅强中^[24] 和邹志利^[25] 用射线方程描述连续缓坡海脊上的波浪运动, 并指出了入射波的方向是决定其能否被海脊俘获的关键因素。近些年来, 熊梦婕等^[26] 和王岗等^[27] 分别推导了抛物型和双曲余弦型海脊上的俘获波的解析解, 并且给出了相应的频散关系和俘获效率。Zheng 等^[28] 采用 Bessel 函数推导了对称抛物线型海脊上偶对称俘获波的波面解和频散关系表达式。万鹏等^[29] 基于射线理论推导了指数型海脊上波浪传播轨迹的理论解, 并且提出了震源位于海脊顶部的海啸被海脊完全俘获的条件。Wang 等^[30] 基于线性浅水方程, 推导了双曲余弦平方剖面海脊上对称和反对称情形下的俘获波解析理论, 并采用 FUNWAVE-TVD 进行数值模拟验证其所提理论。Wang 等^[31] 给出了非对称指数型海脊俘获波解析理论并分析了其运动特性。刘建豪等^[32] 基于线性长波方程, 推导出了抛物型对称海脊引导波完整解析理论, 指出对称型海脊同时存在对称与反对称引导波, 其自由水面波动可表示为虚宗量 Bessel 函数形式。

在海脊俘获波的研究中, 由于海脊的剖面形状和走向对俘获波的形成和传播具有决定性影响, 地形的合理选择是开展研究的前提和关键。地壳剧烈运动(如火山喷发、板块俯冲等)所产生的海脊通常较为陡峭, 此类地形上的俘获波一般是由于突变地形对波浪的反射作用所致。如 1996 年的伊里安查亚(Irian

Jaya)地震海啸中, 部分海啸波由于反射作用被马里亚纳(Mariana)和南本周(South-Honshu)海脊所俘获传播至日本^[33]。为此, 可将此类陡峭海脊简化为台阶状地形进行理论建模, 研究海啸波在该类海脊上的传播特性与俘获机理。

值得注意的是, Longuet-Higgins^[18]、Buchwald^[19] 及 Miles^[20] 等对于台阶型海脊俘获波的研究大多基于线性浅水方程, 忽略了波浪的局部非传播波系, 因此其结果与实际海脊上的俘获波特性存在一定偏差。另一方面, 李玉成和滕斌^[34] 的专著系统总结了波浪对海上建筑物作用的理论与方法, 其中虽涉及水平台阶前波浪反射与透射问题的解析解, 但未对海脊俘获现象进行专门讨论。鉴于此, 本文在李玉成和滕斌^[34] 总结 Miles^[20] 给出的水平台阶前反射问题的解析解的基础上, 首先基于势流理论推导出台阶地型上俘获波的解析解, 求得反射系数和透射系数; 继而推导出在台阶地型上发生全反射的条件, 并系统分析影响发生全反射的关键因素, 探讨波浪频率、入射角及地形几何参数等要素对俘获波形成的影响。本文通过引入势流理论框架, 能够更精确地描述台阶型海脊上俘获波的产生条件与运动特性, 从而为实际陡峭海脊地形上越洋海啸的俘获波传播规律提供更为可靠的理论依据。

2 理论推导

本文基于势流理论, 研究波浪在台阶地形上发生的传播与俘获机制。如图 1 所示, 建立直角坐标系 oxy , 其中 z 轴垂直于静水面且位于海脊中心, y 轴沿着台阶, x 轴垂直于台阶。根据水深变化特征, 将整个流场划为三个区域: 中间浅水区域 Ω_1 、右侧深水区域 Ω_2 和左侧深水区域 Ω_3 。本文仅考虑对称台阶海脊, 即海脊两侧水深相同, 此时仅需研究 $x \geq 0$ 的半无限域。

台阶宽度为 $2b$, 脊顶水深为 d_1 , 左右侧的水深一致都为 d_2 (如图 1)。假定一系列线性微幅波从 $(0, 0, z)$ 处入射, 波浪频率为 ω , 其传播方向与 x 轴成 α 角。该斜向入射波可分解为分别由沿 y 轴和 x 轴传播的

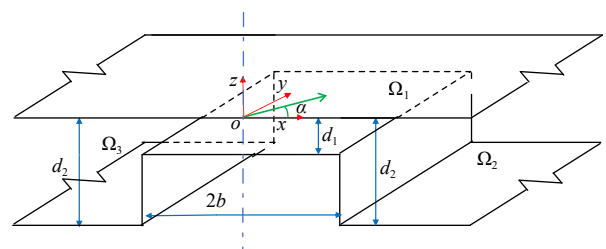


图 1 台阶型海脊水深分布示意图

Fig. 1 Schematic representation of the bathymetry of the stepped ridge

两个分量: 沿 y 轴传播的波浪在台阶为行进波, 沿 x 轴传播的波浪在到达台阶边壁处遭遇水深突变, 将发生部分反射与部分透射的动力学过程。基于这一物理现象, 流场中各区域的速度势可依据特征函数展开法进行解析表述^[34]:

$$\phi_1 = -\frac{igA}{\omega} Z_0(k_0 z) \exp[ik_{0x}(x-b)] \exp(ik_{0y}y) - \frac{igA}{\omega} \left\{ R_0 \exp[-ik_{0x}(x-b)] Z_0(k_0 z) + \sum_{m=1}^M R_m \exp[k_{mx}(x-b)] Z_m(k_m z) \right\} \exp(ik_{0y}y) \quad (1)$$

式中: 右侧第一项为沿 x 向右传播的入射波; 第二项为在台阶边壁反射作用下向左传播的反射波; 第三项为在 Ω_1 区域内随着离开台阶水平距离的增加而衰减的局部非传播波系, 体现了势流理论相对于传统线性波理论在描述波浪局部变形方面的优势。式中右侧第二项和第三项相加为反射势。反射势中, 基于势流理论相比于线性波理论考虑了波浪中局部非传播波系。式(1)中 A 为振幅, g 为重力加速度, i 为单位复数, k_0 、 k_m 、 Z_0 、 Z_m 由下式确定:

$$\begin{cases} \omega^2 = gk_0 \tanh k_0 d_1 \\ \omega^2 = -gk_m \tan k_m d_1 \quad (m = 1, 2, \dots, M) \\ Z_0(k_0 z) = \cosh k_0(z+d_1) / \cosh k_0 d_1 \\ Z_m(k_m z) = \cos k_m(z+d_1) / \cos k_m d_1 \\ k_0^2 = k_{0x}^2 + k_{0y}^2 \\ k_m^2 = k_{mx}^2 - k_{my}^2 \quad (m = 1, 2, \dots, M) \end{cases} \quad (2)$$

式中 $R_m(m=0, 1, 2, \dots, M)$ 是待定系数, 其中反射系数 $K_r = |R_0|$ 。 Ω_2 区域上的速度势为^[34]:

$$\phi_2 = -\frac{igA}{\omega} \left\{ T_0 \exp[i\lambda_{0x}(x-b)] Y_0(\lambda_0 z) + \sum_{n=1}^N T_n \exp[-\lambda_{nx}(x-b)] Y_n(\lambda_n z) \right\} \exp(ik_{0y}y) \quad (3)$$

式中: 第一项为从 Ω_1 区域传播至 Ω_2 区域的透射波; 第二项为 Ω_2 区域内随 x 增大而衰减的局部非传播波系, 反映了深水区域波浪的约束效应。类似的, 式(3)中的 λ_0 、 λ_n 、 Y_0 、 Y_n 由下式确定:

$$\begin{cases} \omega^2 = g\lambda_0 \tanh \lambda_0 d_2 \\ \omega^2 = -g\lambda_n \tan \lambda_n d_2 \quad (n = 1, 2, \dots, N) \\ Y_0(\lambda_0 z) = \cosh \lambda_0(z+d_2) / \cosh \lambda_0 d_2 \\ Y_n(\lambda_n z) = \cos \lambda_n(z+d_2) / \cos \lambda_n d_2 \\ \lambda_0^2 = \lambda_{0x}^2 + \lambda_{0y}^2 \\ \lambda_n^2 = \lambda_{nx}^2 - \lambda_{ny}^2 \quad (n = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (4)$$

式中 $T_n(n = 0, 1, 2, \dots, N)$ 是待定系数, 其中透射系数 $K_t = |T_0|$ 。

为使上述速度势满足物理场连续的约束条件, 需

在 $x=b$ 处施加速度势连续和速度连续两条匹配条件。速度势连续条件给出:

$$\int_{-d_1}^0 \phi_1 dz = \int_{-d_2}^0 \phi_2 dz \quad (5)$$

速度连续条件给出:

$$\phi_{2x} = \begin{cases} \phi_{1x} & (-d_1 \leq z \leq 0) \\ 0 & (-d_2 \leq z < -d_1) \end{cases} \quad (6)$$

将式(1)和式(3)代入式(5)可以得到:

$$T_0 Y_0(\lambda_0 z) + \sum_{n=1}^N T_n Y_n(\lambda_n z) = \begin{cases} Z_0(k_0 z) + \left[R_0 Z_0(k_0 z) + \sum_{m=1}^M R_m Z_m(k_m z) \right] & (-d_1 \leq z \leq 0) \\ 0 & (-d_2 \leq z < -d_1) \end{cases} \quad (7)$$

对于式(7), 两边同时乘以垂向特征函数 $Y_n(\lambda_n z)(n = 0, 1, 2, \dots, N)$, 并且同时对 z 积分得到:

$$\int_{-d_1}^0 \left[Z_0(k_0 z) + R_0 Z_0(k_0 z) + \sum_{m=1}^M R_m Z_m(k_m z) \right] Y_n(\lambda_n z) dz = \int_{-d_2}^0 \left[\sum_{n=0}^N T_n Y_n^2(\lambda_n z) \right] dz \quad (8)$$

当 $n=0$ 时:

$$\int_{-d_1}^0 \left[Z_0(k_0 z) + R_0 Z_0(k_0 z) + \sum_{m=1}^M R_m Z_m(k_m z) \right] Y_0(\lambda_0 z) dz = \int_{-d_2}^0 T_0 Y_0^2(\lambda_0 z) dz \quad (9)$$

当 $n=1, 2, \dots, N$ 时:

$$\int_{-d_1}^0 \left[Z_0(k_0 z) + R_0 Z_0(k_0 z) + \sum_{m=1}^M R_m Z_m(k_m z) \right] Y_n(\lambda_n z) dz = \int_{-d_2}^0 T_n Y_n^2(\lambda_n z) dz \quad (10)$$

由此可以得到一组线性方程:

$$\{f_n\}_{N+1} + \{A_{nm}\}_{(N+1) \times (M+1)} \{R_m\}_{M+1} = \{T_n\}_{N+1} \quad (11)$$

其中:

$$f_n = \int_{-d_1}^0 Z_0(k_0 z) Y_n(\lambda_n z) dz / \int_{-d_2}^0 Y_n^2(\lambda_n z) dz \\ A_{nm} = \int_{-d_1}^0 Z_m(k_m z) Y_n(\lambda_n z) dz / \int_{-d_2}^0 Y_n^2(\lambda_n z) dz \quad (12)$$

对 ϕ_1 在 x 方向上求导可以得到 Ω_1 区域上 x 方向的速度为:

$$\phi_{1x} = -\frac{igA}{\omega} ik_{0x} Z_0(k_0 z) \exp[ik_{0x}(x-b)] \exp(ik_{0y}y) - \frac{igA}{\omega} \left\{ (-ik_{0x}) R_0 \exp[-ik_{0x}(x-b)] Z_0(k_0 z) + \sum_{m=1}^M k_{mx} R_m \exp[k_{mx}(x-b)] Z_m(k_m z) \right\} \exp(ik_{0y}y) \quad (13)$$

对 ϕ_2 在 x 方向上求导可以得到 Ω_2 区域上 x 方向

的速度为:

$$\phi_{2x} = -\frac{igA}{\omega} \left\{ i\lambda_{0x} T_0 \exp[i\lambda_{0x}(x-b)] Y_0(\lambda_0 z) - \sum_{n=1}^N \lambda_{nx} T_n \exp[-\lambda_n(x-b)] Y_n(\lambda_n z) \right\} \exp(i\lambda_{0y} y) \quad (14)$$

将式(13)和(14)代入式(6)可得:

$$i\lambda_{0x} T_0 Y_0(\lambda_0 z) - \sum_{n=1}^N \lambda_{nx} T_n Y_n(\lambda_n z) = \begin{cases} ik_{0x} Z_0(k_0 z)(1-R_0) + \sum_{m=1}^M k_{mx} R_m Z_m(k_m z) & (-d_1 \leq z \leq 0) \\ 0 & (-d_2 \leq z < -d_1) \end{cases} \quad (15)$$

对于式(15),两边同时乘以垂向特征函数 $Z_m(k_m z)$ ($m=0, 1, 2, \dots, M$),并且在各自的区域上对 z 积分,然后相加得到:

$m=0$ 时,

$$\int_{-d_2}^0 \left[i\lambda_{0x} T_0 Y_0(\lambda_0 z) - \sum_{n=1}^N \lambda_{nx} T_n Y_n(\lambda_n z) \right] Z_0(k_0 z) dz = \int_{-d_1}^0 [ik_{0x} Z_0^2(k_0 z)(1-R_0)] dz \quad (16)$$

$m=1, 2, \dots, M$ 时,

$$\int_{-d_2}^0 \left[i\lambda_{0x} T_0 Y_0(\lambda_0 z) - \sum_{n=1}^N \lambda_{nx} T_n Y_n(\lambda_n z) \right] Z_m(k_m z) dz = \int_{-d_1}^0 k_{mx} R_m Z_m^2(k_m z) dz \quad (17)$$

由此可以得到另外一组方程组为:

$$\{e_m\}_{M+1} + \{R_m\}_{M+1} = \{B_{mn}\}_{(M+1) \times (N+1)} \{T_n\}_{N+1} \quad (18)$$

$$e_0 = -1, e_m = 0 (m=1, 2, \dots, M)$$

$$B_{00} = \frac{-\lambda_{0x}}{k_{0x}} \int_{-d_2}^0 Y_0(\lambda_0 z) Z_0(k_0 z) dz / \int_{-d_1}^0 Z_0^2(k_0 z) dz,$$

$$B_{0n} = \frac{-i\lambda_{nx}}{k_{0x}} \int_{-d_2}^0 Y_n(\lambda_n z) Z_0(k_0 z) dz / \int_{-d_1}^0 Z_0^2(k_0 z) dz,$$

$$B_{m0} = \frac{i\lambda_{0x}}{k_{mx}} \int_{-d_2}^0 Y_0(\lambda_0 z) Z_m(k_m z) dz / \int_{-d_1}^0 Z_m^2(k_m z) dz,$$

$$B_{mn} = \frac{-\lambda_{nx}}{k_{mx}} \int_{-d_2}^0 Y_n(\lambda_n z) Z_m(k_m z) dz / \int_{-d_1}^0 Z_m^2(k_m z) dz \quad (19)$$

联立式(11)和式(18),可以求得 R_m ($m=0, 1, 2, \dots, M$), T_n ($n=0, 1, 2, \dots, N$).

其中 R_m 为:

$$R_m = \frac{B_{m0} f_n - e_0}{1 - B_{mn} A_{nm}} \quad (20)$$

T_n 为:

$$T_n = f_n + A_{nm} R_m \quad (21)$$

根据式(20)可得反射系数为:

$$R_0 = \frac{B_{0n} f_n - e_0}{1 - B_{0n} A_{n0}} \quad (22)$$

台阶型海脊上俘获波的产生机制主要源于台阶边缘对波浪的显著反射作用。当反射系数 R_0 趋近于 1 时,入射波能被台阶地形近乎完全地约束在浅水区域,从而形成俘获波现象。由式(22)得波浪在台阶边缘处发生全反射的条件为:

$$\lambda_0 = k_0 \sin \alpha \quad (23)$$

该条件的物理含义是:在深水区域 Ω_2 上只存在沿 y 方向的波数分量, x 方向上的波数分量为 0。从式中可以看出,该全反射条件仅在波浪从浅水区传向深水区(即 $k_0 > \lambda_0$) 时。

为具体阐明波浪周期对俘获特性的影响,选取典型地形参数进行示例分析:台阶总宽 $2b=50$ km,脊顶水深 $d_1=60$ m,外海水深 $d_2=4500$ m,波周期分别取 $T_1=1$ min、 $T_2=2$ min 和 $T_3=5$ min。将上述参数代入全反射条件式(23),可得到三种不同周期的波在该台阶地形上发生全反射时的临界角分别为 $\alpha_1=14.85^\circ$ 、 $\alpha_2=7.42^\circ$ 和 $\alpha_3=3.42^\circ$,即当不同周期波的入射角度大于对应的临界入射角即可发生全反射。

当周期为 1 min、2 min 和 5 min 的波浪均以角度 7.42° 传播时,不同周期波的传播行为呈现显著差异。由图 2 所示,对于 $T_1=1$ min 的短周期波浪,其入射角小于其临界角,不满足全反射条件,故该波浪仅有一部分能量被反射回台阶区域,另一部分能量则泄漏至台阶以外的深水区;而对于 $T_2=2$ min 和 $T_3=5$ min 的长周期波浪,其入射角分别大于或等于其临界角,满足全反射条件,波浪能在台阶边缘发生完全反射,从而在台阶地形上维持往复运动而不向外泄漏,即产生所谓的俘获波。

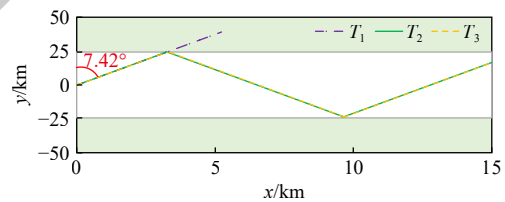


图 2 不同周期波浪以相同角度在台阶地形上传播示意

Fig. 2 Schematic diagram of waves with different periods propagating on a stepped ridge at the same incident angle

3 结果分析

3.1 波面过程

联立求解方程组式(11)和式(18),可以求得 R_m ($m=0,1,2,\dots,M$), T_n ($n=0,1,2,\dots,N$),进而获得入射波在台阶地形上的完整波面演化过程。如图 1 所示,设一

列线性规则波从台阶脊顶中心 $(0, 0, z)$ 处入射, 传播方向与 x 轴成 α 角。该波浪可以分成沿 y 轴和沿 x 轴传播的两个分量。

由于沿 y 轴方向传播的分量沿海脊走向呈直线传播行进, 其波面过程为连续线性规则波, 因此本节重点分析沿 x 轴传播的波浪分量所引起的波面过程。计算参数选取如下: 波浪频率为 $\omega=2\pi$ rad/s, 脊顶水深为 $d_1=0.05$ m, 两侧水深为 $d_2=0.3$ m, 台阶半宽为 $b=1$ m, 入射波振幅 $A=0.02$ m。基于势流理论, 将上述参数带入到方程组可以得出 Ω_1 和 Ω_2 区域的速度势 φ_1 和 φ_2 。根据速度势 φ 与波幅 η 之间的关系 $\eta = \frac{i\omega}{g}\phi|_{z=0}$, 即可得到波幅 η 的表达式, 如图 3 所示。

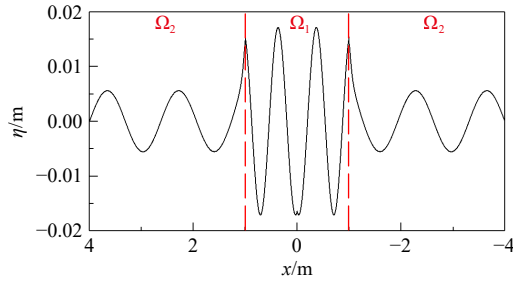


图 3 波幅沿海脊垂向分布
Fig. 3 Wave amplitude varying across the stepped ridge

图 3 中, Ω_1 区域对应台阶地形范围, $x=\pm 1$ 处为台阶边缘; Ω_2 区域为台阶之外的深水区。图中展示了线性规则波从台阶中心向两侧传播的过程: 在台阶边缘 $x=\pm 1$ 处, 入射波发生部分透射与部分反射, 一部分能量以透射波进入深水区 Ω_2 区, 另一部分能量以反射波形式返回台阶 Ω_1 , 并与持续入射的波浪叠加, 形成驻波成分。

由于本文基于势流理论推导, 即流体为无旋、不可压缩的理想流体, 因此波浪在 Ω_1 区域和 Ω_2 区域上波能流是守恒的。 Ω_1 区域水深较浅, 波群速度较小; Ω_2 区域水深较大, 波群速度较大。根据波能流守恒, Ω_1 区域的波高大于 Ω_2 区域的波高。值得指出的是, 在台阶边缘附近, 由于水深突变引入了局部非传播波系, 该波系在 $x=\pm 1$ 处对波面形态产生显著影响, 但其振幅随着距离台阶边缘距离的增加而快速衰减。

3.2 不同入射角度下反射系数和 k_0d_1 的关系

本节对反射系数式 (22) 进行无量纲分析, 探讨在水深比 d_2/d_1 为恒定时, 反射系数与无量纲参数 k_0d_1 间的关系, 如图 4 所示。从图可知, 当入射角度为 0° 时, 反射系数随着 k_0d_1 的增加逐渐减小, 并逐渐趋近于零; 当入射角度为 30° 、 45° 和 60° 时, 反射系数随着 k_0d_1 的增加呈现先增后减的变化规律: 在 $k_0d_1=0.7$ 附

近达到峰值, 之后逐渐趋近于零。此外, 在相同的 k_0d_1 条件下, 入射角越大, 反射系数也越大。由此可知, 在水深比 d_2/d_1 一定的情形下, k_0d_1 较小时的波浪成份更容易被台阶地形所俘获, 且入射角度越大越容易被台阶所俘获。

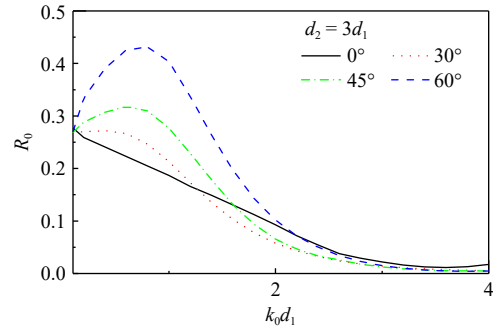


图 4 不同入射角度下反射系数随无量纲参数 k_0d_1 的变化

Fig. 4 Variation of reflection coefficient with dimensionless parameter k_0d_1 under different incident angles

3.3 不同水深比 d_2/d_1 下反射系数和 k_0d_1 的关系

当入射角度固定 $\alpha=0^\circ$ 时, 同样对反射系数进行无量纲分析, 考察不同水深比 d_2/d_1 的条件下反射系数 R_0 与 k_0d_1 的关系, 如图 5 所示。结果表明: 在 d_2/d_1 保持恒定的条件下, 反射系数随着 k_0d_1 的增加而逐渐减小, 并逐渐趋近于 0; 当 k_0d_1 为定值时, 反射系数随着水深比 d_2/d_1 的增加而增加。由此可知, 当 d_2/d_1 一定时, k_0d_1 较小的波浪成份更容易被台阶地形所俘获; 而相同频率条件下, 波浪在水深比 d_2/d_1 越大的地形上越容易被俘获。

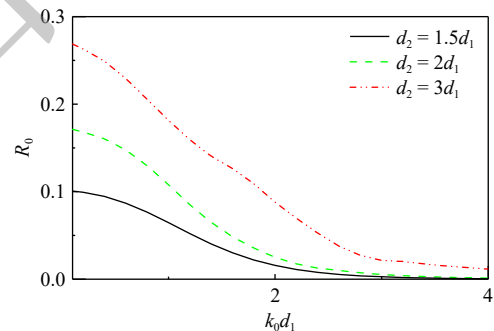


图 5 不同水深比 d_2/d_1 条件下反射系数随 k_0d_1 的变化
Fig. 5 Variation of reflection coefficient with d_2/d_1 under different water depth ratios d_2/d_1

3.4 全反射条件下入射角度与 k_0d_1 和 d_2/d_1 的关系

对全反射条件式 (23) 进行无量纲化处理, 可分别得到发生全反射时入射角 α 与 k_0d_1 和 d_2/d_1 的关系, 如图 6 所示。参数 k_0d_1 反映的是相对波数 (也即相对频率), 而 d_2/d_1 反映的是外海水深与脊顶水深的相对比

值。由图可知:当水深比 d_2/d_1 一定时,全反射所需的临界入射角 α 随着 k_0d_1 的增大而增大;当 k_0d_1 增加到一定值时,临界入射角趋于 90° 并保持不变,此时地形的俘获能力完全由水深比 d_2/d_1 所决定。这意味着在低频区域,波浪易被台阶地形俘获;而在高频区域,波浪则不易被俘获。当 k_0d_1 保持恒定时,全反射所需的临界入射角随水深比 d_2/d_1 的增加而减小;当 d_2/d_1 增

加到一定值时,临界入射角趋于一个恒定值,不再随水深比增大而改变,此时地形的俘获能力完全由 k_0d_1 所决定。这表明:当波浪频率一定时,随着外海水深相对脊顶水深的增加,台阶地形的俘获能力逐渐增强;并当外海水深远大于脊顶水深并达到一定程度后,台阶地形的俘获能力趋于饱和,此时频率成为影响台阶地形俘获能力的主导因素。

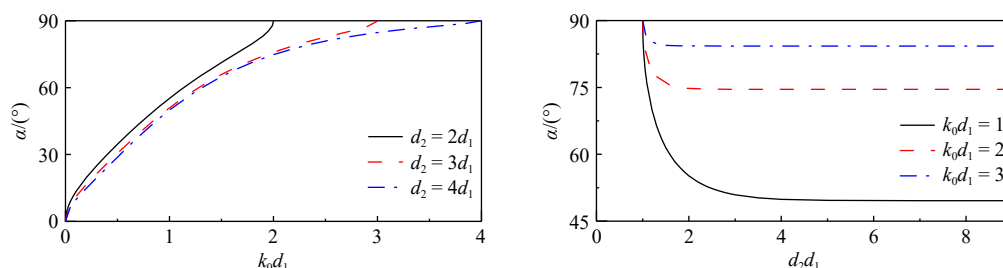


图6 全反射条件下入射角与 k_0d_1 和 d_2/d_1 的关系

Fig. 6 Relationship between incident angle, k_0d_1 and d_2/d_1 under total reflection conditions

4 结论

本文基于势流理论推导了台阶地形上俘获波的解析解,从数学上证实了台阶型海脊俘获波是由波浪在突变地形处的反射所诱发,并进一步给出了波浪发生全反射时临界入射条件的具体表达式。通过系统分析不同水深比 d_2/d_1 和入射角下反射系数与无量纲波数 k_0d_1 的关系,揭示了俘获波的出现条件和运动特性。结果表明,低频波浪成份更容易被台阶地形所俘获,水深比 d_2/d_1 越大,地形的俘获能力越强;同时,俘获效应随入射角的增加而愈发显著。本文探讨了波浪发生全反射的临界条件及其与入射角、 k_0d_1 和

d_2/d_1 的关系:在相对低频区,波浪易发生全反射被地形俘获,而在相对高频区域则不易发生;当频率一定时,台阶地形的俘获能力起初随着外海水深与脊顶水深相对比 d_2/d_1 的增大而增强,但当 d_2/d_1 增加到一定程度时,台阶地形的俘获能力趋于恒定,此时频率成为影响台阶地形俘获能力的主导因素。与已有基于浅水波假设的研究相比,本文采用全水深势流理论,突破了适用于浅水海域的局限,更准确地揭示了台阶型海脊上俘获波的产生条件和运动特性。研究成果可为预测沿台阶型海脊传播的最大海啸波到达时间提供理论依据,对远海海啸灾害的预测与风险评估具有重要意义。

参考文献:

- [1] 耿宝磊, 齐作达, 金瑞佳. 海岸工程长周期波浪问题研究概述[J]. 水道港口, 2025, 46(4): 469-478.
Geng Baolei, Qi Zuoda, Jin Ruijia. Summary of research on long-period wave problems in coastal engineering[J]. *Journal of Waterway and Harbor*, 2025, 46(4): 469-478.
- [2] Wilson R I, Admire A R, Borrero J C, et al. Observations and impacts from the 2010 Chilean and 2011 Japanese tsunamis in California (USA)[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2013, 170(6/8): 1127-1147.
- [3] Rabinovich A B, Woodworth P L, Titov V V. Deep-sea observations and modeling of the 2004 Sumatra tsunami in Drake Passage[J]. *Geophysical Research Letters*, 2011, 38(16): L16604.
- [4] Heidarzadeh M, Satake K, Murotani S, et al. Deep-water characteristics of the trans-Pacific tsunami from the 1 April 2014 M_w 8.2 Iquique, Chile earthquake[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2015, 172(3/4): 719-730.
- [5] Gusiakov V K. Strongest tsunamis in the world ocean and the problem of marine coastal security[J]. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2014, 50(5): 435-444.
- [6] Hilditch J P, Thomas L N. Trapping of near-inertial waves and critical layer formation in baroclinic currents[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2026, 1031: A40.
- [7] Kowalik Z, Horrillo J, Knight W, et al. Kuril Islands tsunami of November 2006: 1. Impact at Crescent City by distant scattering[J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2008, 113(C1): C01020.
- [8] Rabinovich A B, Lobkovsky L I, Fine I V, et al. Near-source observations and modeling of the Kuril Islands tsunamis of 15 November 2006 and 13 January 2007[J]. *Advances in Geosciences*, 2008, 14: 105-116.

- [9] Swapna M, Srivastava K. Effect of Murray ridge on the tsunami propagation from Makran subduction zone[J]. *Geophysical Journal International*, 2014, 199(3): 1430–1441.
- [10] Rabinovich A B, Candella R N, Thomson R E. Energy decay of the 2004 sumatra tsunami in the world ocean[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2011, 168(11): 1919–1950.
- [11] Horrillo J, Knight W, Kowalik Z. Kuril Islands tsunami of November 2006: 2. Impact at Crescent City by local enhancement[J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2008, 113(C1): C01021.
- [12] Wilson R I, Admiré A R, Borrero J C, et al. Observations and impacts from the 2010 Chilean and 2011 Japanese tsunamis in California (USA)[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2013, 170(6/8): 1127–1147. (查阅网上资料, 本条文献与第 2 条文献重复, 请确认)
- [13] Rabinovich A B, Titov V V, Moore C W, et al. The 2004 Sumatra tsunami in the southeastern Pacific Ocean: new global insight from observations and modeling[J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2017, 122(10): 7992–8019.
- [14] Rabinovich A B, Woodworth P L, Titov V V. Deep-sea observations and modeling of the 2004 Sumatra tsunami in Drake Passage[J]. *Geophysical Research Letters*, 2011, 38(16): L16604. (查阅网上资料, 本条文献与第 3 条文献重复, 请确认)
- [15] Kowalik Z, Horrillo J, Knight W, et al. Kuril Islands tsunami of November 2006: 1. Impact at Crescent City by distant scattering[J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2008, 113(C1): C01020. (查阅网上资料, 本条文献与第 7 条文献重复, 请确认)
- [16] Roger J, Pelletier B, Duphil M, et al. The M_w 7.5 Tadine (Maré, Loyalty Islands) earthquake and related tsunami of 5 December 2018: seismotectonic context and numerical modeling[J]. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2021, 21(11): 3489–3508.
- [17] Jones D S. The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1953, 49(4): 668–684.
- [18] Longuet-Higgins M S. On the trapping of waves along a discontinuity of depth in a rotating ocean[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1968, 31(3): 417–434.
- [19] Buchwald V T. Long waves on oceanic ridges[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1969, 308(1494): 343–354.
- [20] Miles J W. Kelvin waves on oceanic boundaries[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1972, 55(1): 113–127.
- [21] Mei C C. The applied dynamics of ocean surface waves[J]. *Ocean Engineering*, 1984, 11(3): 321.
- [22] Griffith D J, Ruppeiner G. Introduction to electrodynamics[J]. *American Journal of Physics*, 1981, 49(12): 1188–1189.
- [23] Shaw R P, Neu W. Long-wave trapping by oceanic ridges[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1981, 11(10): 1334–1344.
- [24] 梅强中, 戴世强, 周显初. 水波动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
Mei Qiangzhong, Dai Shiqiang, Zhou Xianchu. Dynamics of Water Waves[M]. Beijing: Science Press, 1984. (查阅网上资料, 未找到本条文献英文翻译信息, 请确认)
- [25] 邹志利. 水波理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
Zou Zhili. Water Wave Theories and Their Applications[M]. Beijing: Science Press, 2005.
- [26] 熊梦婕, 王岗, 郑金海. 抛物型海脊上俘获波理论及其应用[C]//第十七届中国海洋(岸)工程学术讨论会论文集(上). 南宁: 中国海洋工程学会, 2015: 544–551.
Xiong Mengjie, Wang Gang, Zhen Jinhai. Theory of trapped waves over parabolic oceanic ridges and its applications[C]//Proceedings of the 17th China Marine (Coastal) Engineering Academic Symposium (Part 1). Nanning: China Society for Marine Engineering, 2015: 544–551. (查阅网上资料, 未找到本条文献英文翻译信息, 请确认)
- [27] 王岗, 胡见, 王培涛, 等. 双曲余弦海脊上海啸俘获波的解析与数值研究[J]. *海洋学报*, 2018, 40(5): 15–23.
Wang Gang, Hu Jian, Wang Peitao, et al. Analytical and numerical investigation of tsunami trapped waves over a hyperbolic-cosine squared ocean ridge[J]. *Haiyang Xuebao*, 2018, 40(5): 15–23.
- [28] Zheng Jinhai, Xiong Mengjie, Wang Gang. Trapping mechanism of submerged ridge on trans-oceanic tsunami propagation[J]. *China Ocean Engineering*, 2016, 30(2): 271–282.
- [29] 万鹏, 王岗, 于洪荃, 等. 基于射线理论的海脊俘获波机制[J]. *海洋学报*, 2019, 41(11): 35–39.
Wan Peng, Wang Gang, Yu Hongquan, et al. Mechanism of trapped wave over an ocean ridge based on the ray theory[J]. *Haiyang Xuebao*, 2019, 41(11): 35–39.
- [30] Wang Gang, Liang Qiuhua, Shi Fengyan, et al. Analytical and numerical investigation of trapped ocean waves along a submerged ridge[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, 915: A54.
- [31] Wang Gang, Zhang Yiwei, Zheng Jinhai, et al. Analytical investigation of trapped waves over a submerged exponential ridge[J]. *Ocean Engineering*, 2023, 273: 114002.
- [32] 刘建豪, 王岗, 郭海, 等. 抛物型对称海脊引导波完整解析理论[J]. *海洋学报*, 2023, 45(6): 36–43.
Liu Jianhao, Wang Gang, Guo Hai, et al. Complete analytical solutions for guided waves along a parabolic symmetrical ridge[J]. *Haiyang Xuebao*, 2023, 45(6): 36–43.
- [33] Koshimura S I, Imamura F, Shuto N. Characteristics of tsunamis propagating over oceanic ridges: numerical simulation of the 1996 Irian Jaya earthquake tsunami[J]. *Natural Hazards*, 2001, 24(3): 213–229.
- [34] 李玉成, 滕斌. 波浪对海上建筑物的作用[M]. 3 版. 北京: 海洋出版社, 2015.
Li Yucheng, Teng Bin. Wave Action on Maritime Structures[M]. 3rd ed. Beijing: China Ocean Press, 2015.

Occurrence Conditions and Propagation Characteristics of Trapped Waves over the Submerged Ridge Based on Potential Flow Theory

Xu Yang¹, Wang Gang^{2,3}, Hu Jian⁴

(1. Shandong Provincial Communications Planning and Design Institute Group Co., Ltd, Jinan 250101, China; 2. Key Laboratory of Ministry of Education for Coastal Disaster and Protection, Hohai University, Nanjing, 210024, China; 3. College of Harbour, Coastal and Off-shore Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 4. Yangtze River Shipping Development Research Center, Wuhan 430014, China)

Abstract: Oceanic ridges can channel tsunami energy as trapped waves that propagate over distances exceeding ten thousand kilometers. Owing to their distinct propagation characteristics, these waves carry substantial energy to remote oceanic regions, posing serious threats to coastal engineering structures and to human life and property. Using potential flow theory, this study derives an analytical solution for trapped waves over a stepped ridge. It is mathematically demonstrated that trapped waves over a step-type ridge arise from wave reflection at the abrupt topographic change, and an explicit expression is provided for the critical condition required for total internal reflection to occur—thereby enabling wave trapping. The results show that lower-frequency wave components are more readily trapped by the stepped topography, and that the trapping effect becomes increasingly pronounced as the incident wave angle increases. By adopting the full-depth potential flow theory, this study overcomes the limitation of previous theories that are applicable only to shallow-water waves, thus offering reliable theoretical formulations for investigating trapped waves over realistic, steep ridge topographies.

Key words: Trapped Waves; Stepped Ridges; Analytical Solution; Potential Flow Theory; Tsunami